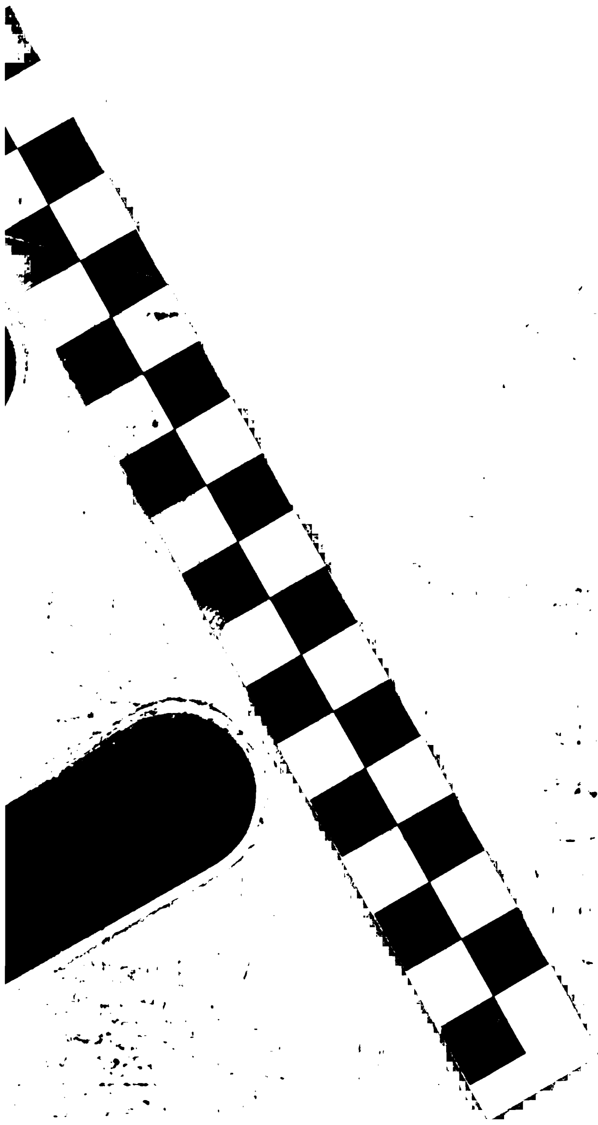
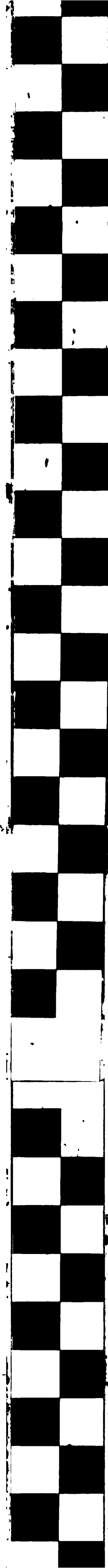
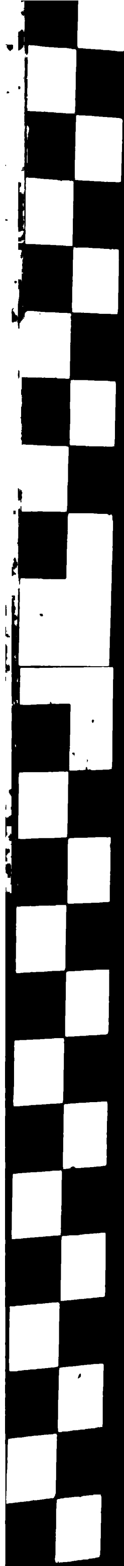









PROPERTY OF
The University of Michigan Libraries
1817
ARTES SCIENTIA VERITAS

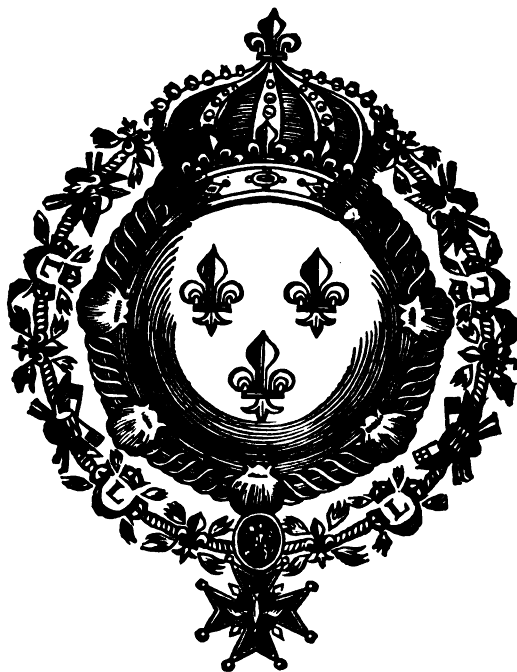
IMPRESSION ANASTALTIQUE
CULTURE ET CIVILISATION
115, AVENUE GABRIEL LEBON
BRUXELLES
1966

CHRISTIANI HUGENII ZULICHEMII, CONST. F.

HOROLOGIUM OSCILLATORIUM

SIVE

DE MOTU PENDULORUM AD HOROLOGIA APTATO DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ.



PARISIIS,
Apud F. MUGUET, Regis & Illustrissimi Archiepiscopi Typographum, viâ Citharæ, ad insigne trium Regum.

MDCLXXIII.
CUM PRIVILEGIO REGIS.

Dividitur liber hic in partes quinque, quarum

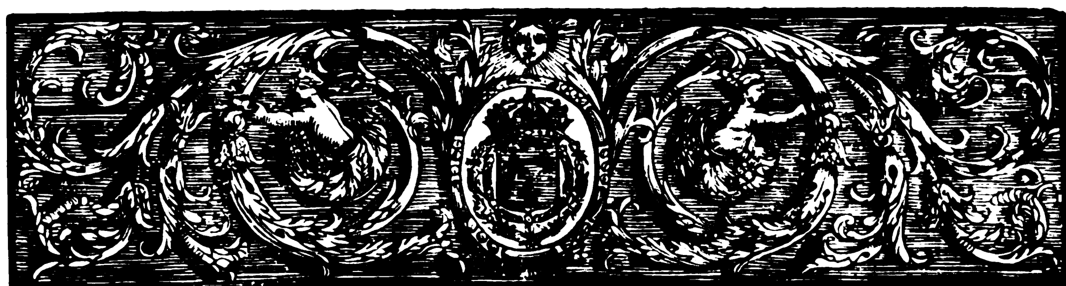
Prima *Descriptionem* HOROLOGII OSCILLATORII continet.

Secunda agit de *Descensu gravium*, & *motu eorum in Cycloide*.

Tertia de *Evolutione & Dimensione linearum curvarum*.

Quarta de *Centro Oscillationis seu Agitationis*.

Quinta *alterius Horologii constructionem*, in quo circularis est penduli motus, exhibet, & Theoremata de *Vi Centrifuga*.



LVDOVICO XIV,
FRANCIÆ. ET NAVARRÆ
REGI INCLYTO.

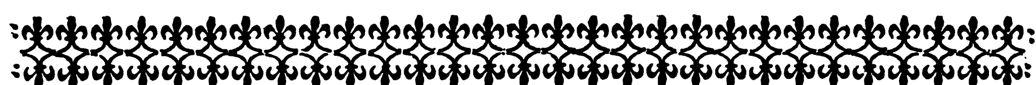
RENATAM, Rex maxime, restitutamque hoc sæculo Geometriam, Galliæ præcipue debemus. Hinc enim orti, qui magna meliorique sui parte deperditam, ac veluti sepultam, instaurarunt primi, & in lucem reduxerunt. Quorum vestigiis insistentes, ita eam deinde, per totam Europam, excoluere viri subtilissimi, ut pauca jam posterorum industriæ ab his relicta videantur; veterum vero inventa longissime prætervecti sint. In hac scientia, quam semper admiratus sum & amavi plurimum, quandocunque ad eam animum applicui, illa mihi præ cæteris proposui investiganda, quæ vel ad vitæ commoda, vel ad Naturæ cognitionem, reperta prodesse possent. Tunc verò optimè operam me collocasse existimavi, cum in ea incidissem, in quibus utilitas cum inveniendi difficultate, ac subtilitate ali-

qua, conjuncta foret. Quod si commendationis nonnihil accersere muneri nostro permittitur, ne prorsus indignum tua magnitudine appareat; non alias felicius, quam in hoc Horologii invento, utrumque illud me consecutum esse profiteor. Etenim, cum ex parte mechanicum sit inventum; ex parte altera, eaque multò præcipua, geometricis principiis constet; id quod ad posteriorem hanc attinet, non levi conamine, ex intimis artis recessibus petendum fuit: adeo quidem, ut inter omnia, quæ impensiore studio hactenus pertractaverim, haud dubie primum huic speculationi locum tribuam. Quænam vero in his sit utilitas, non est quod multis, Rex potentissime, ostendere tibi laborem. Non solum enim diutinâ experientiâ compertum habes, ex quo regiæ tuæ penetralibus recipi meruere Automata nostra, quantum, æquabili horarum demonstratione, cæteris hujusmodi machinationibus excellant: sed & potiores usus eorum, quibusque jam inde à principio mihi destinata fuere, non ignoras. Illos scilicet, quos & in Cælestium observationibus, & in Longitudinibus locorum inter navigandum dimetiendis, præstare apta sunt. Tuo enim jussu, non semel, per mare vecta fuere Horologia nostra. Tuis auspiciis eadem nec pauca, Astronomiæ usibus dicata, visuntur in præclara illa Vraniæ arce, quam insigni nuper magnificentia, quantaque antehac regum nemo, exædificandam curasti. Quæ quoties mecum reputo, toties de fortuna hu-

jus inventi, quod in tua tempora inciderit, non parum mihi gratulari ſoleo. Nec jam requiret quiſquam, opinor, qui quantum tibi illud debeat intelliget, cur lucubrationes has, quibus rationem ejus omnem deſcriptionemque explicui, auguſto Nomini tuo inſcribendas duxerim. Ac minus etiam id mirabitur, qui mihi, ad hæc atque alia meditanda, tranquillum otium benignitate tua contigiſſe didicerit. Namque & hujus, ut mihi aliquatenus apud te ratio conſtaret, adnitendum erat; & quoquo modo conandum, ut, multis continuiſque à te beneficiis affectus, nonnulla grati animi ſignificatione defungerer. Scio equidem, rebus maximis, negotiiſque iis intento, quæ in illo rerum faſtigio poſitum agitare convenit, haudquaquam tibi liberum eſſe, ut ad hujuſmodi contemplationes animum, alioqui rerum omnium capacem, advertas. Sed non ideo minus grata hæc fore, minuſve tibi probatum iri arbitror, Rex auguſtiſſime; cui illa maximè placere videmus, quæ plurimum publicè proſunt; neque aliud magis curæ eſſe, quam ut nova incrementa ſumant optimæ diſciplinæ, noviſque illuſtrentur inventis. Hoc enim ſatis declarat eximia illa tua, ac ſingularis, tum in ipſis promovendis, tum in his qui cognitione earum præminent remunerandis, liberalitas. Quam non immenſæ, ac ſolito majores, bellorum impenſæ quidquam imminuunt: non Galliæ tuæ fines circunſcribunt. Vt plane te hoc agere appareat, quò non ſolum ſub

imperio tuo viventes, ſed & Orbis univerſus, quacunque beneficio tuo dignus eſt, te regnante, eruditior, ornatior, felicior evadat. Cui veriſſimæ præclariſſimæque gloriæ tuæ, ita aliquid fortaſſe etiam hæc literaria monumenta conducent; ut, ſi viguiſſe hoc tempore ſtudia iſta, arteſque, poſteris teſtari poſſint, ſimul illos edoceant, tuæ hoc virtuti, atque animi magnitudini, ante omnia acceptum ferendum eſſe. Lutetiæ Pariſiorum; XXV. Mart. A. CIↃIↃCLXXIII.





HADRIANI VALLII DAPHNIS, ECLOGA.

Ad Christianum Hugenium Zulichemium, Constantini F.

FINITIMUM tutela, simul jucunda voluptas,
Dilectæ Phœbo, Sceverinides * Oceaninæ;
Hunc quoque Pierium mihi fortunate laborem:
Pervigilem noctem quo carmine duxerit Ancon
Navita, dicemus: vestro sic gurgite numquam
Pan lavet, aut turpes incestent æquora Fauni.
Te, quem Fama vehit super aurea sidera curru,
Ne pigeat nobis aurem præbere faventem,
HUGENIDE, decus Hugenidum, fratrumque patrisque:
Haud indigna tuo ferimus donaria sensu,
Sicelisin aptata modis à vate Batavo
Mixta Palæphatio commenta Solensia versu,
Teque intertextum tuaque præclara reperta.
Iam caput Oceano, stipata minoribus astris,
Extulerat radiis fraternis æmula Phœbe,
Cum reditum molirentur pastoria pubes,
Sidere quam pleno conchas legisse marinas
Iuverat, hærentesque vadis captare paguros.
In celso tamen advertunt Ancona morantem
Colle, reum toties promissi carminis. ipsum
Thestylis & Corydon, quos cætera turba secuti,
A tergo circumveniunt, cinguntque corona.
Ecquid agat, rogitant blandè: tum fausta precantur;
Et damnant voti, promissaque carmina poscunt.
Contra ille; O Pueri, quid portet crastinus Eos,
Sedi explorator: turmales agmine mergi,
Solivaga aut cornix, aut alcyones desertæ

* *Sceverina, Pagus apud Batavos, mari adjacens.*

Si qua darent mihi ſigna. maris cras æquor arandum.
Detinuit nunc uſque Iovis clementia ludi,
Et picturatus tot circum animalibus æther.
Quæ nos in vitreo miramur monſtra profundo,
Fert radians æther, vultus formaſque natantum.
Cancer ibi eſt, delphinque; eſt grandi corpore cetus.
Ad Boream piſces, & contemplere ſub Auſtro
Piſces; nuper ubi numero creviſſe feruntur.
Sunt urna, fluviuſque, & apluſtris comta carina
Illic. quin operis ſimulamina plurima veſtri,
Luminaque in cœlo pecori debentia nomen.
Sunt hœdi parvæque ſues, materque capella.
Et fuſe ſparſo quæ candet ſemita lacte.
Veſtibulum ſervant, elucens vellere fulvo
Dux aries, ingenſque auratus cornua taurus.
Bini cernunturque canes, pernoxque bubulcus;
Plauſtraque; quique auriga ſuis excuſſus habenis.
Stellatum volat alatus per inane caballus:
Ac præſepe ſuum juxta ſtabulantur aſelli.
Illic virgo, manum Cereali inluſtris ariſta,
Et, tranſmutatus faciem, Pan ipſe renidet;
Daphnin amans veſtrum, ſecretæ rupis in umbra,
Vranie velut edocuit: me ſingula Daphnis.
Singula quæ (carmen quia poſcitis) ordine pandam.
  Extemplo tentat vocem: numeroſque modoſque
Perpendens mulcet variis concentibus auras.
Tum venti poſuere. jacet ſine fluctibus æquor;
Factaque ſunt terris, ſunt facta ſilentia ponto.
Mox interfatur: Quod proſperet; ab Iove magno
Ordiar: ordiri conſuerunt ab Iove vates.
Vos, nec enim rerum brevis hic mihi naſcitur ordo,
Nocturnum chorea defendite corpore frigus.
  Inde Iovis magni cunas, veteriſque celebrat
Saturni juſſum crudele, dolumque Cybelles;
Ortaque Dictæis Corybantia ſacra latebris:
Vt puero nutrix ſit olentis lecta mariti
Vxor; & ipſa recens hædos enixa gemellos;
Queis comitata polum modo lucida ſtella frequentet,
Quæ prius Oleniis balavit beſtia campis;
Sub pedibuſque terat formoſi limen Olympi.

Tantus

Tantus amor Iovis, & percepti gratia lactis.
Nec tamen hoc niveum manasse fluore nitorem,
In duo secta vias, oculis manifesta videntum,
Semita quo candet ducens ad tecta Tonantis;
Tergeminam sed noctem productumque canebat
Alciden mundo; deus immortalis haberi
Haud pote qui fuerat, sopitæ parvula mammis
Labra pater gnati nisi conjugis admovisset:
Quæ, simul experrecta, simul conterrita, surgens
Vvidulas tenero mammas subtraxerit ori,
Indignata. pavimentum tabulataque cœli
Deciduus maculis ut tunc infecerit albis
Per convexa ruens in se revolubilis humor:
Orbita cycneo nunc unde bifurca colore,
Ducta per æquales medio discrimine partes,
Cæruleum velut argento ferruminet axem:
Axem, cervices qui quum lassaret Atlantis,
Haud gravis Herculeo requierit sarcina collo;
Atque tot ærumnas quem post, manesque subactos,
Ipse suis ornet jam portio magna triumphis;
Hesperidum contra custodem divitis horti
Insurgens Anguem pede nixus; apertaque retro
Terribili rictu nil curans ora Leonis;
Lernexque audacem Hydræ succurrere Cancrum;
Monstra novercales testantia jugiter iras
Et frustra bacchatum odium Iunonis iniquæ.
Hinc aliam memorat grassatam fraude novercam;
Et transmittendi pavidam nimis æquoris Hellen:
In thalamos sit ut illa tuos, Neptune, recepta:
Phryxeumque pecus, fœtamque heroibus Argo
Phasidos ad fluctus deducit & æthera cantu.
Nec silet Europæ vectoris præmia; vel te,
Bigarum Pelopis perjuri, Myrtile, rector.
Myrtoum pelagus signaras ante caduco
Funere; sublimem nunc tollunt cornua Tauri.
Haud procul his Hyades notat exardescere: sed, quæ
Sunt Hyades Graiis, Suculas dixisse Latinos;
Atque duas septem mutasse Trionibus Arctos;
Arctophylaca pigro, sua plaustra sequente, Bubulco;
Quando bovem prisco vocitabant more trionem,

é

Quod tereret duro proſciſſam vomere terram.
Hanc adeo ſortem miſerans, ſuſpiria ducit;
Buceriumque genus queſtu compellat inani;
Ah pecus infelix, armentum! ſæcla fuerunt,
Pondere quum duro neque vos gemeretis aratri,
Navita nec veſtro vocitaret nomine ſtellas.
Tunc neque ſidus erat terris pia Virgo relictis,
Quæ Cereale manu ſpicum gerit; Icariotis
Sive ſit Erigone, cui fida Canicula patrem
Quærenti indigna monſtravit cæde peremtum;
Atque, comes dominæ, domino comitem Oarioni
Aſtra minor ſocium majorem repperit inter:
Seu magis Aſtræi ſit ſanguine creta, perenne
De genitore ſuo quæ nomen contulit aſtris:
Sive ſit antiquæ Themidis juſtiſſima proles,
Averſata jugo vos aſpectare gravari,
Tempora dum, pulſis melioribus, ærea ſurgunt:
Sive ſit alma Ceres; horrens fugitiva videre
Vos quoque mactari; nil pejor linquit inauſum
Ferrea dum ſoboles, ipſorum inimica Deorum:
Quos, quaſi de terra (nam Dii coluiſtis & illam)
Sit pepuliſſe parum, tentavit pellere cœlo.
Tum deteſtatur ſuffultos angue Gigantas;
Porphyriona, ſtatu terrentem cuncta minaci;
Rhæcumque; immanemque Gygen, validumque Mimanta;
Enceladumque; manuſque rotantem Ægeona centum;
Et, cui par nemo feritate, Typhöea dirum,
Auſos invaſiſſe Deos tellure fugatos,
Ac totum magno cœlum compleſſe tumultu,
Vndique divulſas jaculantes torviter ornos
De tumulis cumulorum montibus ex aggeſtis.
Terrigenam ut pubem, Divûm penetralia ſancta
Rimantem, Superi mentito fallere vultu
Quæſierint, addit; diſpertitoſque pavore:
Donec apud latè ſtagnantis flumina Nili
Horrificam faciem Pan ſumſerit Ægocerotis;
Ambiguoque ſono Superos animarit ad arma,
Anguipedeſque metu dare terga coëgerit omnes:
Cœlo donandos Aſinos auxiſſe timorem
Congerie vocum, perterricrepoque fragore:

Illa cælicolis nam tempestate fuisse
Auxilio Satyros, Silenorumque phalangem,
Evantes in asellis cum Bacchæo ululatu,
Thyrsis armatos, tectos colocynthide parma.
  Parvus ut interea volucer cum matre Cupido
Venerit Assyrii fugiens Euphratis ad undam;
Induerintque gregis (Syriæ post numina genti)
Squammigerum formas, gemini nunc aurea Pisces
Lumina, signiferum Capricorno juncta per orbem,
Ni fusa medius secernat Aquarius Vrna;
Deucalioneos neque non ediſſerit imbres,
Nectaris aut quanti Ganymedes pocula verset;
Sive sit is Cecrops, peplo præsignis Athenæ;
Pastor Aristæus seu plena alvearia gestet,
Quæ subter volitetis apes examine denso.
  Qualiter & pandus vectarit Ariona Delphin,
Ac aliter vectum Danaeium Persea narrat;
Cepheaque, Andromedenque, & mœstam Cassiepeiam;
Insertumque polo vastum Pistricis hiatum:
Quem Phaëthonteus longo sinuamine propter
Fulgeat Eridanus declivi proximus Austro:
Nuper ad occulti Batavos ubi verticis axem
Intuitos nova squammigerum simulacra micare:
Sollertes Batavos, imo seu gurgite piscem
Venari sit opus, vel in alto sidera cœlo.
  Tum canit, ut Daphnis sacra sub rupe docentem
Viderit Vranien: argutas carmina silvas,
Et repetita cavos ediscere carmina montes:
Vt Chaldæa vetus, mira dulcedine capti,
Stent auditores circum, & Babylonia turba;
Dein quos Graia tulit, quos aut Nilotica tellus,
Itala quos, ac pulchra suo cum Cæsare Roma;
Post Arabum de stirpe viri & regnator Iberus;
Ac tandem quos consultos Germania misit
Astrorum cœlique, suæ qui sidera terræ;
Inferior nullis ut item neque Gallia desit;
Gallia magnanimi Regis splendore superba;
Borbonios ignes cui parturit arduus æther:
  Tum Dea quo Daphnin, Divam quo Daphnis amore
Complexus, quanti non conscia Latmia saxa:

Vtque Conon juveni radium donarit, utrimque
Multo insignem auro, & pellucidulis crystallis;
Per quas quod spectes, prope fiat; & augmina sumat:
Dixerit &: Sollers, en, primus quale Batavus
Munus adornarit; sed Etrusci quo decus Arni
Est Antenorea senior Tyrrhenus in urbe
Regna Iovis princeps metatus, ab æthere vobis
Nunquam nota prius miracula nuntia portans;
Lunaï montes; vultus tibi, Phosphore, ternos;
Quove satellitio sublustri nocte vagetur
Stella Deûm regis per cærula templa superne.
Hoc quoque tu non nota prius miracula prodes:
Hujus erat tibi servatus sollertior usus;
Arcanumque Chroni mortalibus omne recludes.
Accipe frustra olim nobis optabile donum.
Daphnidis ad gratum nomen pernice chorea
Exsultant alacres Pueri: neque segnius ipse
Prosequitur; Geminas imitantia lumina falces
Hactenus ut vanè Saturni credita sidus
Oblongo tam diversa sub imagine disco
Fingere, quando globum teretem teres annulus extra
Splendet, & ambo nigror spatii disterminat intus;
Exiguo circum quos erret stellula gyro:
Omnia divino quæ fretus munere Daphnis
Extulerit, non ante novam vulgata per artem:
Adjungitque; quod his meritis permulsus, eundem
In sua magna Chronus sit adire sacraria passus:
Heic oculis lustrarit ut omnia; promserit atque
Inventum subtile secandi temporis illinc;
Partes quo minimas ac momina dividat horæ,
Oscilla ex tenui suspendens mollia filo:
Id labyrintheos cursus qui dirigat alni,
Ignarumque viæ ratis haud sinat esse magistrum:
Cui neque quotidie tam certus spondeat auctor,
Oceano quantum Titan altissimus exstet;
Ac quibus emergat, queis tunc simul occidat oris,
Daphnidos egregio norint conamine docti.
Ille canit: chorus in numerum sua brachia quassant,
Alternoque solum pede pulsant. at freta saltu
Librabant hilares sese super humida thynni.

Auritus leporum populus tunc creditur ultro
Iliceas liquisse domos, carasque quietes
Vicini nemoris: nulloque frequentior unquam
Caricis arrosor prodiisse cuniculus antris
Tempore narratur; narrent si vera puellæ
Littoreæ, quæ siccandis custodia passim
Retibus ad ventos expansis forte sedebant.
Pectore Nereïdes nudo, lasciva caterva,
Visa per incertam Lunam, visæve putantur,
Et Triton, Glaucusque, procul sub luce maligna;
Tuque, cubans juxta stratas prope littora phocas,
Neptuninarum pecudum fidissime custos:
Neu quisquam seræ meminit decedere nocti.
Interea tenebræ densantur; & abdita nimbo
Cynthia dum latitat, cœli de parte serena
Cinctum non solitis processit crinibus astrum,
Prolixumque trahens albore notabile syrma.
Mirantur chorus attoniti. miratur & ipse;
Præsertim tantum capiti cum demsit honorem,
Ornatumque sequacem omnem mox reddita Luna.
Infit &: Ad sua quisque mapalia tendite nota,
Prodigio nil solliciti, curamve foventes.
Insuetos alias tales cantabimus ignes,
Et trepidantem nequicquam formidine vulgum.
Hæc Ancon: mihi visa tibi quæ digna referri,
HUGENIDE, decus Hugenidum, cui sidera curæ,
Nec Phœbum ac Pimplæ fas est contemnere Divas,
Queis tua tota domus, fratres, genitorque dicati.
Sic neque te facies peregrini terreat astri,
Idemve anne alius vario fulgore cometes.

A. CIↃ IↃC LXV.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS par la grace de Dieu Roy de France & de Navarre : A nos amez & feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maistres des Requestes ordinaires de nostre Hostel, Baillifs, Seneschaux, Prevosts, leurs Lieutenans, & tous autres Justiciers & Officiers qu'il appartiendra, Salut. Nostre cher & bien amé FRANÇOIS MUGUET nostre Imprimeur ordinaire, Nous a tres-humblement fait remontrer qu'il luy auroit esté mis és mains un Livre intitulé, *Christiani Hugenii Zulichemii Const. F. Horologium Oscillatorium, seu de motu Pendulorum ad horologia aptato demonstrationes Geometricæ*, qu'il desireroit donner au public s'il nous plaisoit luy en accorder la permission, humblement requerant icelle. A CES CAUSES voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous luy avons permis & accordé, permettons & accordons par ces presentes d'imprimer ou faire imprimer ledit Livre en telle forme, caractere, volume, & autant de fois que bon luy semblera, durant le temps de six années entieres & consecutives, à commencer du jour qu'il sera achevé d'imprimer pour la premiere fois, faisant tres-expresses défenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, de l'imprimer ou faire imprimer, vendre ny débiter durant ledit temps en aucun lieu de nostre Royaume, sans le consentement de l'Exposant, ou de ceux qui auront droit de luy, sous quelque pretexte que ce soit, à peine de quinze cens livres d'amende applicable, un tiers à Nous, un tiers à l'Hôpital General de nostre ville de Paris, & l'autre tiers à l'Exposant, de confiscation des exemplaires contrefaits, & de tous dépens, dommages & interests, à la charge qu'il en sera mis deux exemplaires en nostre Biblioteque ordinaire, un en celle du cabinet de nostre Louvre, & un autre en celle de nostre amé & feal Garde des Sceaux le sieur Daligre. SI vous mandons que du contenu en ces presentes vous fassiez joüir & user l'Exposant, & ceux qui auront droit de luy pleinement & paisiblement, cessant & faisant cesser tous troubles & empêchemens au contraire, voulans qu'en inserant ces presentes ou extrait d'icelles en chacun des exemplaires, elles soient tenuës pour bien & deuëment signifiées ; Commandons au premier nostre Huissier ou Sergent sur ce requis, faire pour l'execution des presentes tous exploits à ce necessaires. CAR tel est nostre plaisir. DONNE' à Versailles le dernier jour de Septembre l'an de grace mil six cens soixante-douze. Et de nostre Regne le trentiéme. Signé, LOUIS. Par le Roy, COLBERT.

Registré sur le Livre de la Communauté des Marchands Libraires & Imprimeurs de Paris, le 4. Novembre 1672. suivant l'Arrest du Parlement du 8. Avril 1653. & celuy du Conseil Privé du Roy du 27. Fevrier mil six cens soixante-cinq. Signé, D. THIERRY, Syndic.

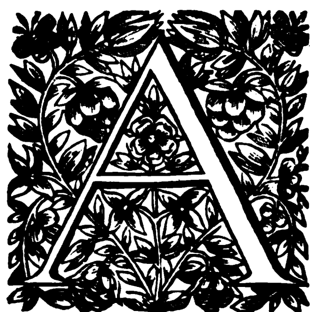
Achevé d'imprimer pour la premiere fois le premier jour d'Avril 1673.

Les Exemplaires ont esté fournis.

CHRISTIANI



CHRISTIANI HVGENII
ZVLICHEMII, CONST. F.
HOROLOGIVM OSCILLATORIVM,
SIVE
DE MOTV PENDVLORVM AD HOROLOGIA APTATO
Demonſtrationes Geometricæ.



NNVS agitur ſextus decimus ex quo fabricam horologiorum, tunc recens à nobis inventorum, edito libello publicam fecimus. Ab illo verò tempore cùm multa invenerimus ad perfectionem operis ſpectantia, viſum eſt ea ſingula hoc libro exponere. Quæ quidem adeo ad perfectionem ejus inventi pertinent, ut potiſſima ejus pars cenſeri poſſint, ac velut fundamentum totius mechanicæ hujus, quo prius deſtituta erat. Menſura enim temporis certa atque æqualis pendulo ſimplici naturâ non inerat, cum latiores excurſus anguſtioribus tardiores obſerventur; ſed geometria duce diverſam ab ea, ignotamque antea penduli ſuſpenſionem reperimus, animadversâ lineæ cujuſdàm curvaturâ, quæ ad optatam æqualitatem illi conciliandam mirabili planè ratione comparata eſt. Quam poſtquam

horologijs adhibuimus, tam constans certusque eorum motus evasit, ut post crebra experimenta terra marique capta, manifestum jam sit & Astronomiæ studijs & arti Nauticæ plurimùm in ijs esse præsidij. Hæc ea est linea quam defixus in circumferentia currentis rotæ clavus, continua circumvolutione, in aëre designat; à Geometris nostri ævi cycloidis nomine donata, & ob alias multas sui proprietates diligenter expensa; à nobis vero propter eam quam diximus mensurandi temporis facultatem, quam nihil tale suspicantes, ac tantùm artis vestigiis insistentes, inesse ipsi comperimus. Hanc cum jam pridem amicis horum intelligentibus notam fecerimus (nam non multo post primam horologij editionem animadversa fuit) nunc eandem, demonstratione quàm potuimus accuratissima firmatam, omnibus legendam proponimus. Itaque in hac tradenda demonstratione potissima pars hujus libri versabitur. Vbi primùm necesse fuit novis nonnullis demonstrationibus stabilire & promovere ulterius viri maximi Galilei de descensu gravium doctrinam, cujus fructus desideratissimus, atque apex veluti summus, hæc ipsa quam invenimus cycloidis est proprietas.

Quæ porro ut ad pendulorum usum aptari posset, nova curvarum linearum consideratio adhibenda fuit, earum scilicet quæ sui evolutione alias curvas generant. Vnde comparatio inter se longitudinis curvarum cum rectis nascitur, quam ulterius etiam quam præsens necessitas postulabat prosecutus sum, propter theoriæ, ut mihi visum est, elegantiam & novitatem.

Cæterùm ad explicandam Penduli Compositi naturam, cujus utilitatem in constructione horum automatôn demonstro, adjungenda fuit Centrorum Oscillationis contemplatio, à pluribus quidem, sed minus feliciter, hactenus tentata; in qua theoremata complura animadversione, ni fallor, digna reperientur, ad figuras lineares, planas, solidasque pertinentia. Ante hæc omnia vero præmittitur ipsa horologij mechanica constructio, pendulique applicatio, eâ formâ quæ ad usus astronomicos aptissima reperta est, ad cujus instar reliquæ omnes, mutatis quæ opus est, facile ordinari possint.

Quia vero contigit egregio hujus inventi successu, quod fieri plerumque solet, quodque futurum prædixeram, ut plures sese ejus auctores esse cuperent, aut si non sibi ipsis, suæ tamen nationis alicui potius quàm nobis eum honorem tribui vellent, iniquis eorum conatibus tandem aliquando occurrendum hic

arbitror. Nec ſanè aliud fere opponere ijs neceſſe fuerit præterquam id unum, nempe ante annos ſexdecim, cum nec dicto nec ſcripto cujuſquam de horologijs hujuſmodi mentio facta eſſet, aut rumor ullus omnino ferretur (loquor autem de penduli ſimplicis uſu ad horologia tranſlato, nam de Cycloidis additione nemo credo controverſiam movebit) conſtructionem eorum propria meditatione me adinveniſſe & perficiendam curaſſe. Inſequenti anno, qui nempe hujus ſæculi quinquageſimus octavus fuit, delineationem automati deſcriptionemque typis vulgaſſe; exemplaria, tum operis ipſius, tum libelli, quaquaverſum dimiſiſſe. Nam cum hæc ita omnibus nota ſint, ut nec teſtimoniis eruditorum, nec Bataviæ Ordinum actis, quibus poſſent, confirmari opus habeant, facile apparet quid de illis exiſtimandum ſit, qui ſeptem poſt annis eandem conſtructionem, quaſi à ſe ſuiſve amicis profectam, libris ſuis venditarunt. Qui vero Galileo primas hic deferre conantur, ſi tentaſſe eum, non vero perfeciſſe inventum dicant, illius magis quam meæ laudi detrahere videntur, quippe qui rem eandem, meliore quam ille eventu, inveſtigaverim. Cum autem vel ab ipſo Galileo, vel à filio ejus, quod nuper voluit vir quidam eruditus, ad exitum perductum fuiſſe contendunt, horologiaque ejuſmodi re ipsâ exhibita, neſcio quomodo ſibi creditum iri ſperent, cum vix veriſimile ſit adeo utile inventum ignoratum manere potuiſſe annis totis octo, donec à me in lucem ederetur. Quod ſi deditâ operâ celatum fuiſſe dicant, idem hoc intelligunt à quolibet alio poſſe obtendi, qui ſibi originem inventi arrogare cupiat. Itaque probandum quidem id foret, neque eo magis ad me tamen quicquam pertineret, niſi unà quoque oſtendatur, id quod omnes latebat, mihi ſoli innotuiſſe. Et hæc quidem neceſſariæ defenſionis cauſa dicenda fuere. Nunc ad ipſius automati conſtructionem pergamus.



FIG. I.

FIG. II.

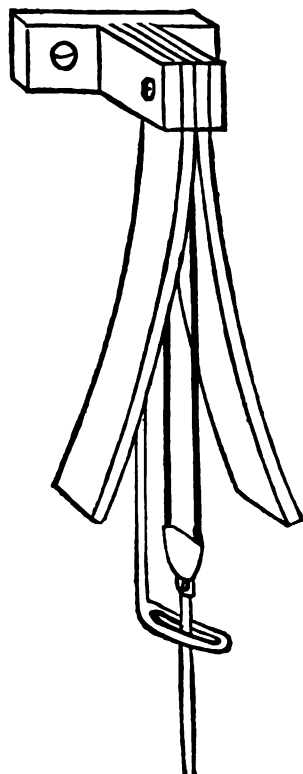
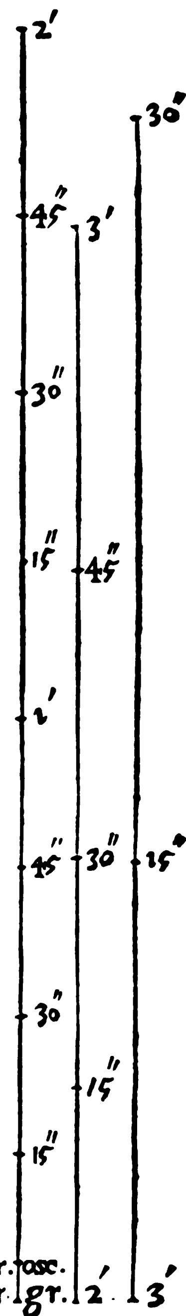


FIG. IV.



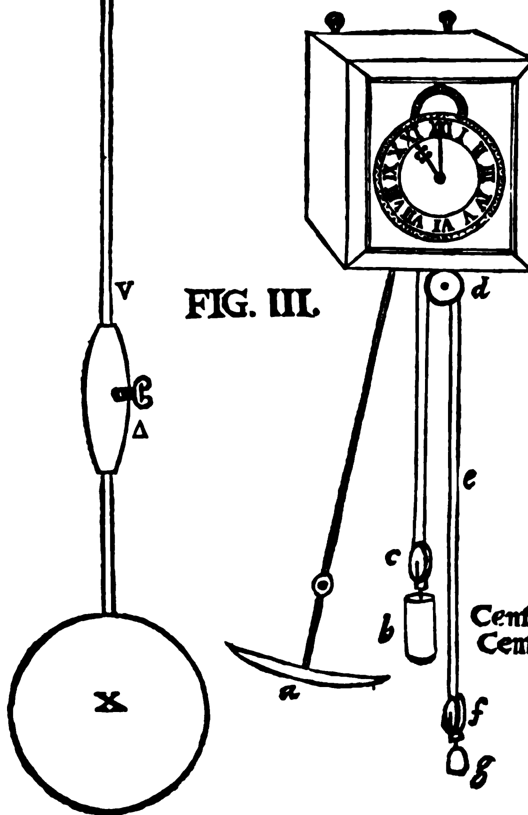
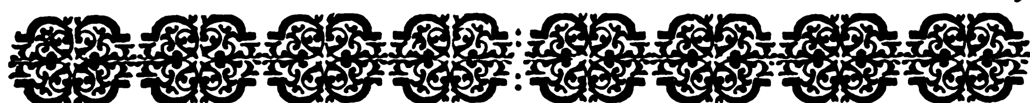


FIG. III.



HOROLOGII OSCILLATORII.

PARS PRIMA,

Descriptionem ejus continens.

FIGVRA adscripta horologium à latere inspiciendum præbet, ubi primum laminæ binæ sunt A A, B B, semipedali aut paulo ultra longitudine, latæ pollices duo & semis, quarum anguli quatuor columellis coaptantur, ut sesquipollice inter se distent. His laminis rotarum præcipuarum axes utrinque inseruntur. Prima atque infima est quæ notatur C, dentibus 80 incisa, cujus axi orbiculus quoque D affixus est, aculeis ferreis asper, ut funem cum appensis ponderibus contineat, quæ qua ratione ordinentur postea dicetur. Ponderis itaque vi rota C vertitur; hæc movet proximum tympanum E dentium octo, unáque rotam F eodem axe hærentem, cui dentes 48. Hanc excipit tympanum aliud G, & in eodem axe rota H, quibus dentium numerus idem qui tympano rotæque præcedenti. Sed hæc rota ejus est generis quas à forma coronarias vocant artifices nostri. Hujus dentibus agitatur tympanum I simulque rota K, quæ eodem axe tenetur, ad perpendiculum erecto. Tympano dentes 24; rotæ 15, atque hi ad instar serræ dentium incisi. Supra mediam rotam K transversus jacet axis pinnatus L M, cujus extrema sustinent hinc inde gnomones N Q & P, seorsim affixi laminæ B B. Notanda vero in gnomone N Q pars deorsum prominens Q, quæ oblongo foramine patens transmittit axem L M, simulque retinet eum quem rotæ K tympanoque I communem esse diximus, inferiori sui parte gnomoni N innitentem. In lamina B B foramen amplum excavatum est, quo ultra ipsam extendatur axis pinnatus L M, qui subtili cuspide insertus gnomoni P, liberius ita movetur quam si ab ipsa lamina B B sustineretur simulque ultra eam promineret, debet enim prominere necessario ut affigi possit clavula S, quæ simul cum eo versationes faciat. Est autem hic motus reciprocus, nunc in hanc nunc in illam partem, quum dentes rotæ K alternatim occurrant pinnulis L L, notâ vulgo ratione, quæque proinde diligentiori explicatione non indiget.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Porro clavula s, ima ſui parte reflexa ac foramine oblongo terebrata, penduli virgam ferream, cui plumbum x affixum eſt, amplectitur. Hæc vero virga ſupernè duplici filo ſuſpenſa eſt inter geminas lamellas, quarum una T hic tantum cernitur; itaque alteram figuram juxta deſcripſimus, quæ utriuſque formam flexumque & totam hanc ſuſpendendi penduli rationem exprimeret. Quanquam de vera laminarum iſtarum curvatura pluribus poſtea agendum erit.

Nunc autem ut de motu horologij dicamus, nam reliquas figuræ partes poſtea exequemur, facile equidem apparet & vi rotarum, à pondere tractarum, perpendiculi V X motum ſuſtentari, poſtquam ſemel manu incitatum fuerit; & ſimul perpendiculi ſtatos recurſus rotis univerſis, totique adeo horologio movendi legem normamque præſcribere. Clavula enim, quantumvis levi rotarum impulſu acta, non tantum obſequitur trahenti perpendiculo, ſed & ſingulis recurſibus pauliſper ejus motum adjuvat, atque ita perennem reddit, qui alioqui ſua ſponte, vel verius occurſu aëris, deficeret paulatim, vergeretque ad quietem. Rurſus vero, quum ejuſmodi ſit natura penduli ut eodem ſemper tenore feratur, neque ab eo ulla ratione præterquam mutata longitudine dimoveri poſſit; utique poſtquam flexu lamellarum, inter quas ſuſpenſum eſt, æqualitatem illam conſequuti fuimus; nequaquam permittitur rotæ K, ut nunc citius nunc tardius incedat, etſi ſæpe, ut in vulgaribus horologiis, id facere conetur; ſed neceſſario ſinguli dentes ejus coguntur æqualibus tranſire temporibus. Hinc vero manifeſtum eſt, & reliquarum quæ præcedunt rotarum, & denique etiam indicum æquabiles converſiones effici, cum omnia proportionaliter moveantur. Quamobrem ſiquid in fabrica vitij fuerit, vel, ob aëris mutatam temperiem, difficilius rotarum axes volvantur; dummodo non eo uſque ut omnis horologij motus interrumpatur; nulla propter hæc inæqualitas aut motus retardatio timenda erit, ſemperque aut rectè tempus metietur aut omnino non metietur.

Indices porro hoc pacto circumaguntur atque ordinantur. Tertia lamina prioribus parallela eſt Y Y, pollicis quarta parte diſtans ab ea quæ notatur A A. In ea circuli horarij deſcripti ſunt centro eodem X quo protenditur axis rotæ C. Quorum circulorum interior duodecim horarum diviſionem habet, alter ſcrupulorum 60. Axi vero rotæ C aptatur, ultra laminam A A, rota β, tubulo cohærens qui uſque ad E continuatur trans laminam Y Y; atque ita

insidet axi illi, ut una cum illo circumferatur; sine illo tamen, ubi opus fuerit, converti possit. Ad E index imponitur, horæ spatio circuiturus atque ita scrupula prima, seu sexagesimas horarum, demonstraturus. Rota vero quam diximus β, aliam rotam, totidem quot ipsa habet dentium, impellit, atque una affixum ei tympanum cui dentes sex, axiculo eorum communi hinc laminâ A, inde gnomone δ suffulto. Hoc tandem tympano rota ζ movetur, dentes habens 72, tubulumque affixum qui & ipse ultra laminam Y ad θ porrigitur, paulo citra quam desinit tubulus rotæ β, quem intra se complectitur. Parte extrema θ apponitur horarius index, brevior aliquanto illo quem scrupula prima signare diximus, cum interiore gyro ferri debeat. Secunda vero scrupula ut absque errore demonstrentur, imponitur axi rotæ H, usque ad laminam Y producto, orbis λ, cui circulus in sexaginta partes divisus inscribitur, incisoque in laminâ Y foramine ad Z, eæ divisiones, cuspide in summo foramine defixâ, prætereuntes notantur. Hæc vero tota indicum circulorumque horariorum dispositio ex figura minori clarius perspicitur, exteriorem horologij formam referente.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Cæterum penduli longitudinem, rotis quemadmodum diximus ordinatis, eam esse oportet ut scrupula secunda singulis recursibus metiatur, quæ longitudo tripedalis est, cumque commodè in schemate exhiberi nequiret, ejus quintam partem à suspensione summa, ubi incipit flexus laminæ T, ad usque centrum ponderis X expressimus. Tripedalem dico, non alicujus respectu pedis qui apud Europæ gentem hanc illamve in usu sit, sed certo æternoque pedis modulo ab ipsa hujus penduli longitudine desumpto, quem PEDEM HORARIUM in posterum appellare liceat, ad illam enim omnium aliorum pedum mensuræ referri debent quas incorruptas posteris tradere voluerimus. Neque enim, verbi gratiâ, ignorabitur unquam venturis sæculis Parisini pedis modus, dum constabit eum ad Pedem Horarium esse ut 864 ad 881. Sed de hujus mensuræ exactissima constitutione pluribus agemus in iis quæ de Centro Oscillationis. nunc tempora conversionum in singulis rotis indicibusque obiter designabimus, ut rectè omnia ad dentium supra descriptorum numerum quadrare intelligantur.

Ergo una quidem conversione rotæ C, decies circumire apparet rotam F, sexagies vero rotam H, & centies vicies supremam MK: cui quum dentes sint quindecim, iisque alternatim pulsentur pin-

Descriptio Horologii.

nulæ L L, una converſione rotæ K numerabuntur ictus 30, quibus reſpondent totidem itus reditusque penduli V X. ideoque converſionibus 120, reſpondebunt oſcillationes ſimplices 3600, qui numerus eſt ſcrupulorum ſecundorum unam horam efficientium. Itaque horæ tempore ſemel circumit rota C, cumque ea ſimul index ad E impoſitus, qui ſcrupula prima demonſtrat. Et quoniam eodem temporis ſpatio etiam rota β, & per eam γ, convertitur, cum tympanidio ſuo dentium ſex, ad quem numerum duodecuplus eſt numerus dentium rotæ ζ, apparet duodecim demum horis hanc circumduci, totidemque indicem illi conjunctum in θ. Denique cum rotæ H ſexaginta converſiones reſpondere oſtenderimus ſingulis converſionibus rotæ C, hinc illa, una cum affixo orbe λ, ſexagies in ſingulas horas circumferetur, hoc eſt, ſemel unius ſcrupuli primi tempore, ideoque partes ſexageſimæ orbiculi λ ſecunda ſcrupula tranſitu ſuo oſtendent: atque ita omnia rectè ſe habere manifeſtum erit. Pondus X in imo perpendiculo trilibre eſt, plumbeum totum, vel ænea ſuperficie plumbum continente. Nec tantum metalli gravitate ſed & figurâ inſuper proſpiciendum (plurimi enim refert) ut quam minimum occurſu aëris impedimentum ſentiat. Eoque in cylindri jacentis oblongi & utrinque præacuti formam fingitur, qualis cernitur ad *a* ſchemate horologij minore. Quanquam in his quæ ad navigationem parantur, forma lentis erectæ aptior viſa eſt.

Porro eodem ſchemate & ponderis alterius *b*, quo motus horologij continuatur, ſuſpendendi ratio expreſſa eſt, quam, incognitam prius, inveſtigare nobis neceſſe fuit, ne interim dum ſurſum retrahitur pondus iſtud, ceſſaret vel impediretur aliquatenus horologij curſus, quod hic omnino cavendum erat. Paratur itaque funis continuus atque in ſe rediens, extremitatibus apte inter ſe connexis. Is primum orbiculum rotæ infimæ conjunctum, qui in ſchemate majori notatus eſt D, amplectitur; inde deſcendens, altera ſui parte trochleam *c*, cui pondus *b* appenſum eſt, ſubit. Hinc ſuper orbiculum *d* aſcendit, extrinſecus horologio affixum, qui ferreos per circumferentiam aculeos habet, atque inſuper ſerratis dentibus ita eſt aptatus ut volvatur tracto fune *e*; nequaquam vero in partem contrariam revolvi poſſit. Ab hoc orbiculo deſcendit funis ad alteram trochleam *f*, cui pondus exiguum *g* appenditur, quantum ſufficit continendo majori *b*, ne aliter quam revoluto orbiculo deſcendat. Namque à trochlea *f* rurſus ad ipſum orbiculum *d*, unde deſcenderat, funis revertitur. Quibus ita

ſe

ſe habentibus, manifeſtum eſt ſemper pondus *b* dimidia ſui gravitate conari ut rotas horologij circumagat, nec tunc quidem ceſſare cum manu funem *e* trahente aſcendere cogitur; adeoque horologij motum nuſquam interrumpi, nec momentum temporis deperdi. DESCRIPTIO HOROLOGII.

Gravitatis modus in pondere *b* definiri certo non poteſt, ſed quo minor conſervando motui ſuffecerit, eo melius accuratiuſque fabrefactum automaton arguet. In noſtris, quæ optima hactenus habemus, ad ſex libras redactum eſt, poſita nimirum orbiculi D diametro pollicari fere, uti exhibita fuit; item perpendiculi pondere trilibri, ac totidem pedum longitudine. Quæ longitudo, ut hoc etiam admoneamus, trans capſam horologij dependet, oblongo foramine perviam, quantum oſcillationibus peragendis neceſſe eſt. Ipſum vero horologium, ad hominis altitudinem ſuſpenſum, horis 30 moveri perſeverat.

Supereſt nunc forma lamellarum deſcribenda inter quas perpendiculum affigi diximus, quarumque ad æquabilem horologio motum præſtandum vel præcipua eſt opera. Abſque his enim Penduli ſimplicis oſcillationes (etſi nonnullis aliter viſum eſt) non erunt æque diuturnæ, ſed brevioris temporis eæ quæ per minores arcus incedent; idque primùm experimento hujuſmodi facile deprehenditur. Si enim fila accipiantur ejuſdem longitudinis duo, paribuſque in parte ima ponderibus religatis, utrumque ſeorſim ſuſpendatur, tumque alterum eorum procul à linea perpendiculari, alterum parumper duntaxat extrahatur, ſimulque è manu dimittantur; non diu utrumque ſimul in partes eaſdem ferri videbitur, ſed prævertet illud cujus exiliores erunt recurſus. Sed & temporum per quoſlibet arcus rationes numeris definiri poſſunt, certâ ſcientiâ nixis, & vero quam libuerit propinquis, veluti quod tempus deſcenſus per totum circuli quadrantem eſt ad tempus per arcum minimum fere ut 34 ad 29. Adeo ut nequaquam reſiſtentiæ aëris ea diverſitas imputanda ſit, ut quidam voluere, ſed ex ipſa motus natura circulique proprietate naſcatur. Quod alio quoque argumento concludi poſſit ex ipſa Penduli iſochroni conſtructione, ubi à circulari linea haud parum receditur, uti mox patebit.

Sed videatur forſan in noſtris horologiis hiſce, ubi eadem ſemper eſt oſcillationum latitudo, nullius momenti futura quam diximus inæqualitas, adeoque nec correctione ulla perpendiculi opus fore. Quod ſane ita eſſet ſi latitudo omnium planè eadem

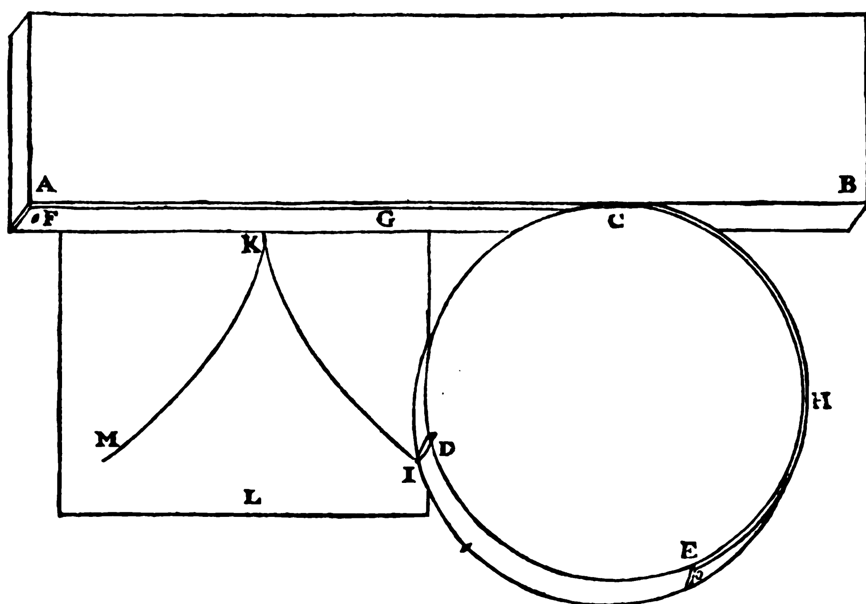
constanter maneret. Sed cum pauxillum quandoque excedat vel deficiat, ex multis minimis differentiolis tandem magna satis conflatur, idque ita esse reipsa atque experimentis evincitur. Etsi enim eadem semper sit ponderis vis, rotæ sibi proximæ respectu, tamen per tot alias transdita, quantâcunque curâ limatæ fuerint, non semper eadem ad perpendiculum usque pervenit. Præterquam quod frigore quoque difficilior motus rotarum efficitur; itemque evanescente aut sordescente quod illis additur oleo. Sed præcipue inæquales fiunt oscillationes horologiis quæ mari vehuntur, ob jactationem navis continuam, adeo ut omnibus quidem in universum, sed his maxime omnium remedio opus sit, quo reciprocationum Penduli latiorum angustiorumque tempora æqualia evadant.

Ad definiendam ergo lamellarum formam in quibus positum est remedium istud, in primis Penduli longitudinem statuisse oportet, quæ facile ex eo habetur, quod sint inter se longitudines perpendiculorum, sicut temporum quæ in singulos recursus impenduntur quadrata. Adeo ut cum tribus pedibus definiverimus longitudinem perpendiculi quod scrupula secunda metitur, ejus quarta pars, sive unciæ novem debeantur ei quod semisecunda notaturum sit. Item si Penduli longitudo quæratur, cujus recursus simplices 10000 horæ spatio peragantur, hoc modo ratio inibitur. Penduli nempe tripedalis scimus 3600 recursus in horas singulas numerari: ergo hujus recursuum tempora singula, majora sunt temporibus Penduli quæsiti, proportione 10000 ad 3600, sive 25 ad 9. Quare ut quadratum numeri 25 ad quadratum 9, hoc est, ut 625 ad 81, ita erit longitudo pedum 3 ad eam quæ quærebatur, nempe unciarum 4 cum $\frac{66}{100}$.

Posita ergo longitudine perpendiculi, puta pedum trium in horologio à nobis proposito, inde Cyclois linea, quæ curvaturam laminarum T datura est, hoc modo describetur.

Super tabula plana affigatur regula A B, semidigiti crassitudine. Deinde fiat cylindrus C D E eadem illa altitudine, diametrum vero baseos, dimidiæ perpendiculi longitudini, æqualem habens; sitque F G H E fasciola, seu potius bractea tenuis, affixa regulæ in F, cylindro verò in circumferentiæ puncto aliquo E, ita ut partim huic circumvoluta sit, partim extendatur juxta latus regulæ A B. Cylindro autem infixa sit ferrea cuspis D I, pauxillum ultra basin inferiorem prominens, atque ita ut circumferentiæ ejus exacte respondeat.

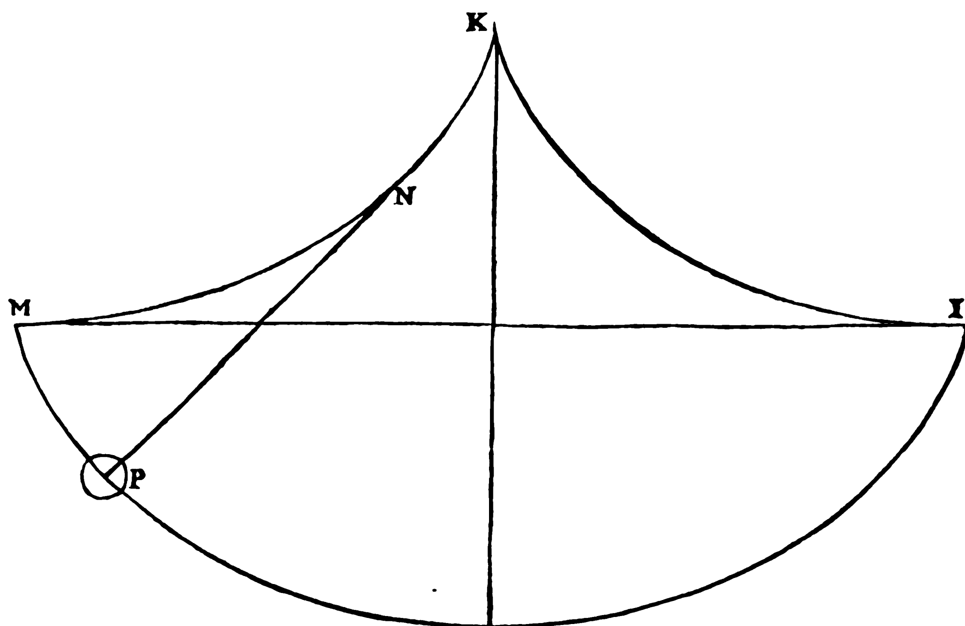
DESCRIPTIO HOROLOGII.



His ita se habentibus, si cylindrus secundum regulam A B volvatur, bracteolæ tantum F G crassitudine intercedente, eâque semper quantum potest extensâ, describet cuspis I in subjecto tabulæ plano lineam curvam K I, quæ Cyclois vocatur. Circulus vero genitor erit C D E, cylindri adhibiti basis. Quod si jam laminam K L ad regulam A B applicuerimus; exaratâ primum in ea cycloidis portione K I, invertemus deinde ipsam, & in superficie adversa similem lineam K M, ab eodem puncto K egredientem, incidemus. Tum figuram M K I, accurate secundum lineas istas, efformabimus, cui figuræ lamellarum interstitium aptari oportet, inter quas perpendiculum suspenditur. Sufficiunt autem ad horologiorum usum portiones exiguæ arcuum K M, K I; reliquo flexu inutili futuro, ad quem perpendiculi filum accedere non potest.

Verum, ut mirabilis lineæ natura atque effectus plenius intelligantur, integras semicycloides K M, K I, alio schemate hic exprimere visum fuit, inter quas suspensum agitatumque Pendulum K N P, diametri circuli genitoris duplum, cujuscunque amplitudinis oscillationes, usque ad maximam omnium per arcum M P I, iisdem temporibus confecturum sit: atque ita, ut appensæ sphæræ P centrum, in linea M P I, quæ & ipsa cyclois integra est, semper versetur. Quæ proprietas insignis, nescio an alii præter hanc lineæ data sit, ut nempe se ipsam sui evolutione describat. Hæc autem quæ dicta sunt, in sequentibus, ubi de descensu gravium, deque evolutione curvarum agemus, singula demonstrabuntur.

Descriptio Horologii.

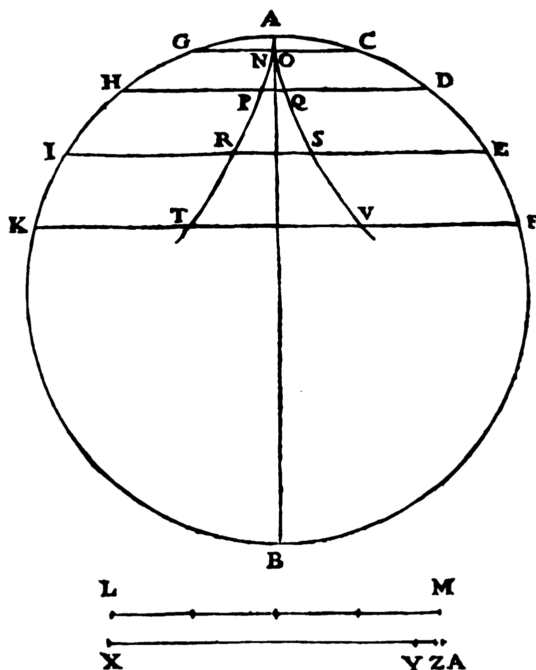


Licebit autem aliter quoque, per inventa puncta, cycloidem designare. Describatur circulus diametro A B, quæ dimidiæ longitudini perpendiculi æqualis sit. In cujus circumferentia sumptis partibus æqualibus quotlibet, A C, C D, D E, E F, A G, G H, H I, I K, jungantur G C, H D, I E, K F, quæ erunt inter se parallelæ. Deinde arcui A F sumatur æqualis linea recta L M, eaque in partes æquales totidem dividatur quot sunt in arcu A F, earumque partium uni æquales ponantur singulæ C N, G O in recta C G, duabus vero partibus rectæ L M, æquales fiant singulæ D P, H Q in recta D H. Tribus vero, singulæ E R, I S in recta E I; atque ita porro si partes plures fuerint acceptæ; ac tandem toti L M æquales fiant singulæ F T, K V in linea extrema F K. Iam si curvæ describantur per puncta A O Q S V, A N P R T, hæ rursus quæsitæ cycloidis partes erunt, inter quas perpendiculum affigi oportet.

Recta autem L M æqualis arcui A F invenitur, si primum duabus rectis, quæ semissibus arcus A F subtenduntur, æqualis ponatur X Y, totius vero arcus subtensæ A F æqualis ab eodem termino accipiatur X Z, differentiæque Y Z triens Z Δ ad totam X Z adponatur. Nam tota X Δ toti arcui A F tam prope æqualis erit, ut licet sextans fuerit circumferentiæ, (neque major hic unquam requiritur) non una sexies millesima parte suæ longitudinis deficiat, uti in his, quæ de Circuli Magnitudine antehac scripsimus, demonstratum est.

Explicitis quæ ad horologii fabricam attinent, nunc quoque illud declarandum est, quo pacto ad veram horarum mensuram componi debeat. Ergo primum, an recte se habeat motus ejus, hoc modo examinabitur.

Descriptio Horologii.



Oculo obſervatoris certus eligatur locus, unde ſidera deſpici poſſint, ſimulque tecta parietesve vicinarum ædium, ſic poſita, ut, cum eò appulerint ſtellæ quædam è fixarum numero, ſimul videri deſinant. Eo loco foramen, ad pupillæ magnitudinem, conſtituatur, ut ſequentibus diebus, abſque errore, oculus ad idem punctum reponi poſſit. Iam ad momentum ipſum, cum ſtellarum aliqua è conſpectu abit, notetur tempus horologio indicatum. Atque idem poſtero die, vel potius aliquot diebus intermiſſis, fiat. Quod ſi tantum unius diei ſpatium duabus obſervationibus interceſſerit, oportet in poſtrema obſervatione tempus horologii deficere ab illo, quod prima obſervatione annotatum fuerat, ſcrupulis primis 3, ſecundis 56. Ita enim rectè ſe habere perpendiculi longitudinem conſtabit; quum tanto ſuperetur quælibet ſiderum fixorum revolutio à die ſolari mediocri. Mediocri dico, quoniam dies ſolares, de medie ad meridiem, non omnes inter ſe æquales ſunt, ut mox amplius exponetur. Si vero poſt plures demum dies obſervatio repetatur, in ſingulos tantundem differentiæ cauſa computandum erit. Sit, exempli gratiâ, in prima obſervatione, ad momentum evaneſcentis ſtellæ, adnotata horologii hora 9, cum ſcrupulis primis 30, ſecundis 18; deinde, ſeptimo poſt die, eâdem diſparente ſtellâ, indicet horam 8, cum ſcrupulis pr. 50, ſec. 24. Hæc hora deficit à priore ſcrupulis pr. 39, ſecundis 54. Quæ, in ſeptem diviſa, dant retardationem diurnam ſcrupulorum 5'. 42''. Debebat autem eſſe ſcrupulorum 3'. 56''. quæ illâ minor eſt ſcrupulis 1'. 46''.

Descriptio Horologii.

Itaque tantundem quotidie deficit horologium à vera, seu media, dierum mensura.

Cæterum alio quoque modo, ad solem, horologii motum examinare licebit. Sed hic jam inæqualitatis dierum naturalium ratio habenda erit. Sunt enim, ut jam dixi, non omnes ejusmodi dies inter se æquales; & quanquam exiguum sit discrimen, tamen plurium dierum intervallo sæpe eo usque excrescit, ut haudquaquam contemni possit. Etenim si & solarium quam perfectissime descriptum habeatur, & horologii automati motus ad verissimam dierum mensuram exactus sit, neque ab ea recedat; eveniet tamen necessario ut, certis anni temporibus, sæpe horæ quadrante, aut etiam semihora, inter se discrepent, ac rursus statis temporibus ultro concordent. Hoc enim ita esse, ex tabula temporis æquatoria quam subjicimus, intelligetur; postquam usum ejus ostenderimus, qui est hujusmodi.

Accipiatur æquatio tabulæ, assignata diei qua primum cum sole, sive cum sciotherico, horologium ut conveniret fecimus. Itemque æquatio diei, qua quæritur quam bene ad dierum mensuram temperatum sit. Quod si jam prior æquatio major fuerit sequente, superare debebit hora automati horam gnomonis eo, quo inter se æquationes istæ differunt. At si posterioris diei æquatio major inveniatur, erit excessus penes horam gnomonis, sive eam quæ ex sole observatur. Vt si, exempli gratia, die 5 Martii in eandem horam conveniant sciothericum horologium atque automaton, cujus diei æquatio invenitur, in tabula, scrupulorum primorum 3, secundorum 11. lubeatque scire ejusdem mensis die 20, an automaton horas æquales rectè metiatur necne: invenietur die posteriori adscripta æquatio scrupulorum primorum 7, secundorum 27. quæ quia superat præcedentem scrupulis primis 4, secundis 16, debebit tanto serior esse hora sciotherici, quam quæ automato indicatur. Vnde, si diversum reperiatur, facile inde colligetur, quantum in dies singulos exuperet automaton, aut retardet.

In computanda tabula hac duplicem causam adhibui, utramque Astronomis notam, Eclipticæ nimirum obliquitatem, & solaris motus anomaliam. Quod cum ratio postulat, tum experientia quoque, his ipsis horologiis superstructa, quæque sine his nequaquam haberi poterat, evincit; quandoquidem, cum æquatione hic proposita, observationes solis, quas sæpe per complures menses, quotidie ad momentum quo meridianum circulum sol occuparet, instituimus, planissime consentire inventæ sunt.

TABULA ÆQUATIONIS DIERUM.

Dies.	Ianuar. Min.	Sec.	Febr. Min.	Sec.	Mart. Min.	Sec.	Apr. Min.	Sec.	Maj. Min.	Sec.	Iun. Min.	Sec.
1	10	40	0	32	2	15	11	18	18	32	18	10
2	10	10	0	24	2	28	11	37	18	39	18	1
3	9	41	0	18	2	42	11	56	18	46	17	51
4	9	13	0	13	2	56	12	15	18	53	17	41
5	8	45	0	9	3	11	12	34	18	59	17	30
6	8	17	0	6	3	26	12	53	19	4	17	19
7	7	50	0	3	3	41	13	12	19	9	17	8
8	7	23	0	1	3	56	13	31	19	14	16	57
9	6	58	0	0	4	12	13	49	19	18	16	46
10	6	34	0	0	4	29	14	6	19	22	16	35
11	6	10	0	0	4	46	14	23	19	25	16	24
12	5	47	0	2	5	4	14	39	19	28	16	13
13	5	24	0	4	5	22	14	55	19	29	16	1
14	5	2	0	8	5	40	15	10	19	29	15	49
15	4	41	0	12	5	58	15	25	19	29	15	37
16	4	21	0	16	6	16	15	39	19	28	15	24
17	4	2	0	21	6	33	15	53	19	26	15	11
18	3	44	0	26	6	51	16	7	19	24	14	58
19	3	27	0	32	7	9	16	21	19	21	14	45
20	3	11	0	40	7	27	16	34	19	18	14	32
21	2	55	0	48	7	45	16	47	19	15	14	19
22	2	39	0	57	8	3	16	59	19	11	14	6
23	2	23	1	6	8	22	17	11	19	7	13	53
24	2	7	1	16	8	41	17	22	19	2	13	40
25	1	52	1	26	9	1	17	33	18	57	13	27
26	1	38	1	37	9	21	17	43	18	51	13	15
27	1	25	1	49	9	41	17	53	18	45	13	3
28	1	13	2	2	10	1	18	3	18	39	12	52
29	1	2			10	21	18	13	18	33	12	41
30	0	51			10	40	18	23	18	26	12	30
31	0	41			10	59			18	18		

Dies.	Iul. Min.	Sec.	Aug. Min.	Sec.	Sept. Min.	Sec.	Octob. Min.	Sec.	Nov. Min.	Sec.	Dec. Min.	Sec.
1	12	19	10	4	16	23	26	30	31	55	25	34
2	12	8	10	8	16	42	26	49	31	55	25	10
3	11	58	10	13	17	1	27	8	31	54	24	45
4	11	48	10	18	17	21	27	26	31	52	24	20
5	11	38	10	23	17	41	27	43	31	50	23	55
6	11	28	10	28	18	1	28	0	31	47	23	30
7	11	18	10	34	18	21	28	16	31	43	23	4
8	11	9	10	41	18	41	28	32	31	37	22	38
9	11	0	10	49	19	1	28	47	31	30	22	11
10	10	52	10	58	19	21	29	2	31	22	21	43
11	10	47	11	7	19	41	29	16	31	13	21	14
12	10	38	11	16	20	1	29	30	31	3	20	44
13	10	31	11	25	20	22	29	43	30	53	20	14
14	10	25	11	36	20	43	29	56	30	43	19	44
15	10	19	11	48	21	4	30	9	30	32	19	14
16	10	13	12	1	21	25	30	22	30	20	18	44
17	10	7	12	14	21	47	30	34	30	8	18	14
18	10	2	12	28	22	9	30	45	29	55	17	44
19	9	58	12	42	22	31	30	55	29	40	17	14
20	9	54	12	57	22	52	31	4	29	23	16	44
21	9	51	13	12	23	13	31	12	29	6	16	14
22	9	49	13	27	23	33	31	19	28	48	15	44
23	9	47	13	43	23	53	31	26	28	30	15	14
24	9	46	13	59	24	13	31	32	28	11	14	43
25	9	46	14	16	24	33	31	38	27	51	14	12
26	9	46	14	33	24	53	31	43	27	30	13	41
27	9	47	14	50	25	13	31	47	27	8	13	10
28	9	49	15	8	25	33	31	50	26	45	12	40
29	9	52	15	26	25	52	31	53	26	22	12	10
30	9	56	15	45	26	11	31	55	25	58	11	40
31	10	0	16	4			31	55			11	10

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Iam postquam utrovis modo eorum quos diximus, sed priore potius, examen institutum fuerit, si multum aberrare à media dierum longitudine horologium reperiatur, adeo ut differentia ultra tria quatuorve prima scrupula ascendat, remedium adhibebitur aucta aut diminuta ipsius penduli longitudine. Vbi hæc tenenda est regula, tot scrupulis primis, in singulos dies, motum horologij acceleratum aut retardatum iri, quot $\frac{7}{10}$ unius lineæ auferentur pendulo aut addentur. Cumque ad veram mensuram hoc pacto jam prope reductum erit, reliqua correctio transpositione exigui ponderis Δ, virgæ V V adhærentis, commode peragetur. Id pondus lentis formam habet, cujus sectionem secundum axem in figura I expressimus. Et quia tantum vicesimam tricesimamve partem æquat ponderis X, hinc fit ut sat magnis spatiis è priore loco discedens, haud multum tamen perpendiculi motum afficiat, accelerando nempe quoties versus mediam virgæ longitudinem attrahitur, retardando cum inde sursum aut deorsum movetur. Ne vero diu punctum illud quærendum sit quo verissimam daturum sit dierum mensuram, divisimus certa ratione, ex motus legibus petita, inferiorem virgæ medietatem, posito nimirum pondere Δ parte quinquagesima ponderis X, parique gravitate ipsius virgæ V V. Quæ quidem divisiones figura IV exhibentur, ubi penduli portio inferior in tres partes secta cernitur, quarum, quæ infimo loco ponenda, est A B. Punctum A est centrum gravitatis ponderis X, à puncto autem C, partes singulæ, quindecim scrupulorum primorum differentiam diurnam efficiunt, ubi tali intervallo mota fuerit lens Δ. Demonstratio autem divisionumque inventio, dabitur in iis quæ de Centro Oscillationis.

Cæterum illorum quoque quæ mari vehuntur, longitudinum investigandarum gratiâ, formam hic describeremus, si quænam maxime ad hunc usum accommodata sit, æque ac in præcedentibus, exploratum determinatumque haberemus; etsi quidem jam nunc eo res deducta sit, ut parum deesse videatur ad perficiendum tantæ utilitatis inventum. Quid autem & qua fortuna hic tentatum fuerit, quidve deinceps tentandum restet, exponere non pigebit.

Prima duo hujusmodi horologia Britannica navi vecta fuere anno 1664, quæ vir nobilis è Scotia nobisque amicus ad nostrorum exemplum fabricari curaverat. Hæc ponderis loco laminam chalybeam habebant in spiram convolutam, cujus vi rotæ circumagerentur,

cumagerentur, quemadmodum in exiguis illis quæ circumferri solent automatis adhiberi solent. Vt autem jactationem navis perferre possent, è chalybea pila, cylindro æneo inclusa, horologia suspenderat, clavulamque quæ penduli motum continuat (erat autem semipedali longitudine pendulum) deorsum productam geminaverat, ut literæ F inversæ formam referret; ne videlicet in gyrum evagari posset penduli motus, unde cessationis periculum. Navis hæc, cum tribus aliis quas itineris socias habuerat, postquam in Britanniam reversa est, Præfectus classis hæc retulit. Se nempe, cum à Guineæ littore solvisset, atque ad insulam, sancti Thomæ dictam, pervenisset, quæ æquinoctiali circulo subjacet, compositis hic ad solem horologiis, occidentem versus cursum instituisse, atque ad septingenta circiter milliaria continuo tramite progressum, tum rursus vento favente Libonoto ad Africæ littora declinavisse. Cum autem ad ducenta trecentave milliaria eò cursum tenuisset, magistros aliarum navium, veritos ne priusquam Africam attigissent aquâ ad potum deficerentur, suasisse ut ad insulas Americanas, Barbatorum dictas, aquandi gratiâ deflecteret. Tum sese concilio nauclerorum habito, jussisque ut Ephemeridas ac supputationes singuli suas proferrent, reperisse cæterorum calculos à suis diversos abire, unius quidem 80 milliaribus, alterius centenis, tertii amplius etiam. Ipsum vero, cum ex horologiorum indicio collegisset non amplius quam triginta circiter milliaribus abesse insulam *del Fuego* dictam, quæ una est earum, non procul ab Africa distantium, quæ à Viridi promontorio nomen habent, eamque postero die teneri posse; confisum pendulis suis eò cursum dirigi imperasse, ac die insequenti sub meridiem eam ipsam in conspectum venisse insulam, paucisque post horis navibus stationem præbuisse. Et hæc quidem ex Præfecti illius relatu.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Ab eo vero tempore aliquoties tum Batavorum tum Gallorum opera, idque Regis Serenissimi jussu, repetita fuere experimenta, vario eventu, sed ita ut sæpius negligentia eorum quibus horologia commissa erant quam ipsamet automata culpari possent. Optimus vero successus fuit in Mediterraneo mari, expeditione in Cretam insulam, quò illustrissimus Dux Belfortius, Candiæ à Turcis obsessæ auxilium laturus, cum Gallorum copiis missus erat, ubi & in prælio occubuit. Is in ea qua vehebatur navi, horologia hujusce experimenti gratiâ habebat, virumque Astronomiæ peritum iis præfecerat, è cujus observationibus, in singulos dies habitis, longitudines locorum ad quæ in ea profectione aut appulerunt na-

DESCRIPTIO HOROLOGII.

ves, aut quæ prætervecti dignoſcere oculis potuerant, horologiorum operâ exacte dimenſas fuiſſe comperimus, atque ita ut Geographicis deſcriptionibus quæ melioris notæ habentur eædemmet longitudinum differentiæ deſignatæ reperiantur. Namque inter Toloni portum Candiamque oppidum differentia hor. 1. ſcrup. 22′ reperta fuit, hoc eſt graduum longitudinis 20. ſcrup. 30′. ac rurſus à Candia Tolonum revertentibus differentia proxime eadem. qui conſenſus certiſſimum veritatis eſt indicium.

Inter eundem Toloni portum & inſulam quandam cui *Maretimo* nomen eſt, prope promontorium Siciliæ quod Occidentem ſpectat, Lilybæum olim vocatum, differentia horaria obſervata eſt ſcrup. prim. 25, ſec. 20, quibus reſpondent gradus longitudinis 6, ſcrup. 20′. Item à Tolono ad inſulam *Sapienza* dictam, quæ juxta Peloponneſum eſt Occidentem verſus, hora 1, ſcrup. prima 5′, ſec. 45″, quibus reſpondent longitudinis gradus 16, ſcrup. 26.

Horologia ad ſolem examinata fuerant, mane ad Orientem, veſpere ad Occidentem, ſupputato ex data poli altitudine utroque temporis momento. Atque hæc ratio cum naves in anchoris ſtant omnium optima videtur, quod, abſque inſtrumentorum ope, ſolis oculis eæ obſervationes peragantur.

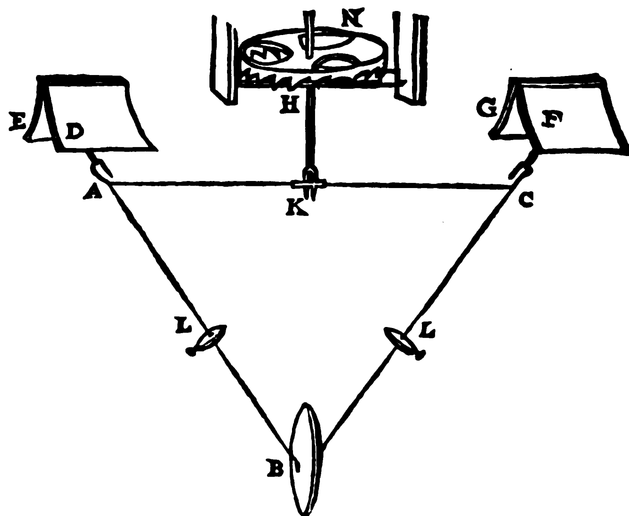
Pendulum vero unciarum novem longitudine inerat horologiis hiſce, pondere ſemiſſis. Rotæ ponderum attractu circumagebantur, eademque cum illis theca incluſæ erant quaternum pedum longitudine. In ima theca plumbum inſuper centum atque amplius librarum additum erat, quo melius perpendicularem ſitum ſuſpenſa in navi machina ſervaret.

Quanquam autem æquabilis admodum ſibique conſtans automati motus per hæc experimenta comperiebatur, tamen alia quoque ratione ulterius illud perficere aggreſſi ſumus, quæ erat hujuſmodi. Rotæ illi quæ ſerratos dentes habet, penduloque proxima eſt, pondus exiguum ex catenula affabre conſtructa appendimus, quo ſola ipſa moveretur, reliqua omni machina nihil aliud agente quam ut ſingulis ſemiſcrupulis horariis plumbum illud exiguum ad priorem altitudinem reſtitueret; eadem fere ratione atque in conſtructione horologii ſuperius expoſita videre eſt, ubi pondus altero fune attollitur, dum altero gravitatem ſuam horologii motui impertit. Quibus ita conſtructis, cum veluti ad unicam rotam omnia eſſent redacta, major adhuc quam antea apparuit horologiorum æqualitas, illudque accidit memoratu dignum, quod cum duo ad hanc formam conſtructa ex eodem tigno ſuſpendiſſemus, tignum vero fulcris duobus impoſitum eſſet; motus penduli

utriusque ita ictibus adversis inter se consensere, ut nunquam inde vel minimum recederent, sed utriusque sonus una semper exaudiretur: imo si data opera perturbaretur concordia illa, semetipsam brevi tempore reduceret. Miratus aliquandiu rem adeo insolitam, inveni denique, instituto diligenti examine, à motu tigni ipsius, licet haudquaquam sensibili, causam petendam esse. Nempe pendulorum reciprocationes horologiis, quantolibet pondere gravatis, motum aliquem communicare; hunc vero motum, tigno ipsi impressum, necessario efficere ut si aliter quam contrariis ad unguem ictibus pendulum utrumque moveatur, eo tamen necessario tandem deveniant, ac tum demum tigni motum penitus interquiescere. Quæ tamen causa non satis efficaciæ haberet, nisi & horologiorum motus aliunde æquabilissimus foret atque inter se consentiens.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

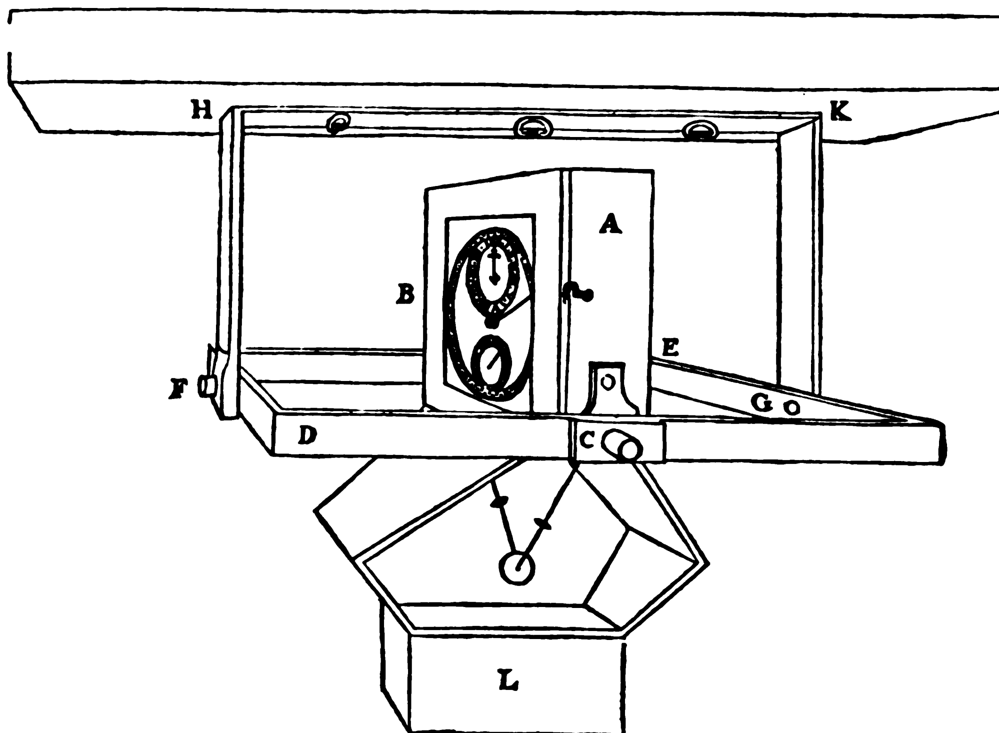
Cæterum experimentis in Oceani navigatione habitis, ac præsertim procella vehementiore aquas agitante, compertum fuit primam ac præcipuam curam de motu horologiorum absque interruptione conservando habendam esse, quod jactationem navis tantam ægrè tunc perferre illa animadversum sit. Quamobrem nova denique ratione & penduli formam immutavimus, & aliter horologia ipsa suspendimus. Pendulum trianguli formam habet, in



cujus vertice deorsum spectante plumbea lens affixa est. Anguli utrique reliqui filis inter laminas cycloidales suspensi sunt. Basis clavulam bifurcatam puncto sui medio recipit ab eaque movetur, illa vero ab rota serrata horizonti parallela motum accipit. Motus rotarum omnium non à pondere sed à chalybea lamina, tympano inclusa, principium habet. In figura adjecta pendulum triangulare est A B C; lens plumbea B; laminæ cycloidales E D, F G. Clavula

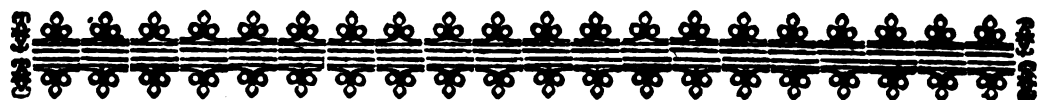
Descriptio Horologii.

bifurcata H K; rota ſerratis dentibus N, quæ cæteris horologii rotis inferior eſt. Lenticulæ ad temperandum penduli motum L L.



Suſpenſionis modum altera hæc figura exhibet; ubi theca A B axibus primum duobus, quorum alter C tantum apparet, rectangulo ferreo D E inſerta eſt; quod deinde rectangulum rurſus axibus ſuis F G ferreo gnomone F H K G ſuſtinetur, qui contignationi navis immobiliter affixus eſt. in ima theca pondus 50 librarum appenſum eſt. Quibus ita ſe habentibus, quacunque navis inclinatione perpendicularem poſitum ſervat horologium. Axis autem C, cum ſibi oppoſito, ita collocati ſunt, ut ad rectam lineam reſpondeant punctis ſuſpenſionum penduli ejus quod diximus: quo fit ut motus ipſius oſcillatorius machinam nequaquam commovere poſſit, quo nihil eſt alioqui quod magis penduli motum deſtruat. Porro axium C C, & F G craſſitudo, quæ pollicem æquat, gravitaſque plumbi inferius appenſi, nimiam movendi libertatem horologio adimunt, faciuntque ut ſi forte ſuccuſſu navis graviore commotum fuerit, continuo ad quietem perpendiculumque ſuum revertatur.

Et hæc quidem ita adaptata machina ut in mare deducatur experientiæque committatur ſupereſt, quæ & certam pene ſucceſſus ſpem præbet, quod iis quæ hactenus inſtituere licuit experimentis, multo melius quam priores illæ omnem motus diverſitatem perferre reperta ſit.



HOROLOGII OSCILLATORII

PARS SECVNDA.

De descensu Gravium & motu eorum in Cycloide.

HYPOTHESES.

I.

SI gravitas non esset, neque aër motui corporum officeret, unum quodque eorum, acceptum semel motum continuaturum velocitate æquabili, secundum lineam rectam.

II.

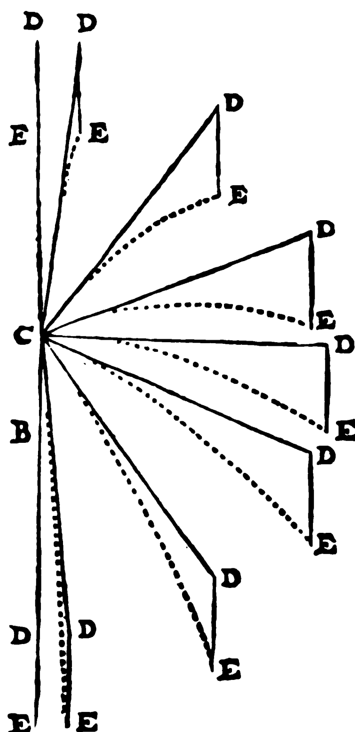
Nunc vero fieri gravitatis actione, undecunque illa oriatur, ut moveantur motu composito, ex æquabili quem habent in hanc vel illam partem, & ex motu deorsum à gravitate profecto.

III.

Et horum utrumque seorsim considerari posse, neque alterum ab altero impediri.

Ponatur grave C è quiete dimissum, certo tempore, quod dicatur F, vi gravitatis transire spatium C B. Ac rursus intelligatur idem grave accepisse alicunde motum quo, si nulla esset gravitas, transiret pari tempore F motu æquabili lineam rectam C D. Accedente ergo vi gravitatis non perveniet grave ex C in D, dicto tempore F, sed ad punctum aliquod E, recta sub D situm, ita ut spatium D E semper æquetur spatio C B, ita enim, & motus æquabilis, & is qui à gravitate oritur suas partes peragent, altero alterum non impediente. Quamnam vero lineam, composito illo motu, grave percurrat, cum motus æquabilis non recta sursum aut deorsum sed in obliquum tendit, è sequentibus definiri poterit. Cum vero deorsum in perpendiculari contingit motus æquabilis C D,

De descensu gravium.



apparet lineam C D, accedente motu ex gravitate, augeri recta D E. Item, cum sursum tendit motus æquabilis C D, ipsam C D diminui recta D E, ut nempe, peracto tempore F, grave inveniatur semper in puncto E. Quod si, utroque hoc casu, seorsim, uti diximus, duos motus consideremus, alterumque ab altero nullo modo impediri cogitemus, hinc jam accelerationis gravium cadentium causam legesque reperire licebit. Et primum quidem duo ista simul ostendemus,

PROPOSITIO I.

ÆQualibus temporibus æquales celeritatis partes gravi cadenti accrescere, & spatia æqualibus temporibus ab initio descensus emensa, augeri continue æquali excessu.

Ponatur grave aliquod, ex quiete in A, primo tempore lapsum esse per spatium A B, atque ubi pervenit in B, acquisivisse celeritatem qua deinceps, tempore secundo, motu æquabili, percurrere posset spatium quoddam B D. Scimus ergo spatium secundo tempore peragendum majus fore spatio B D, quia vel cessante in B omni gravitatis actione spatium B D percurreretur. Feretur vero motu composito ex æquabili quo percursurum esset spatium B D, & ex motu gravium cadentium, quo deprimi necesse est per spa-

tium ipſi A B æquale. Quare ad B D addita D E, æquali A B, ſcimus tempore ſecundo grave perventurum ad E.

A B D E F G H K

Quod ſi vero inquiramus quam velocitatem habeat in E, in fine ſecundi temporis, eam inveniemus duplam eſſe debere velocitatis quam habebat in B fine temporis primi. Diximus enim moveri compoſito motu ex æquabili cum celeritate acquiſita in B, & ex motu à gravitate producto, qui cum tempore ſecundo idem plane ſit ac primo, ideo decurſu temporis ſecundi æqualem celeritatem gravi contuliſſe debet atque in fine primi. Quare cum acquiſitam in fine primi temporis celeritatem conſervaverit integram, apparet in fine ſecundi temporis bis eam celeritatem ineſſe quam acquiſiverat in fine temporis primi, ſive duplam.

Quod ſi jam, poſtquam pervenit in E, pergeret deinceps tantum moveri celeritate æquabili, quantam illic acquiſivit, apparet tempore tertio, prioribus æquali, percurſurum ſpatium E F, quod duplum futurum ſit ſpatii B D; quia hoc percurri diximus dimidia hujus celeritatis, motu æquabili, & temporis parte æquali. Accedente autem rurſus gravitatis actione, percurret tempore tertio, præter ſpatium E F, etiam ſpatium F G, ipſi A B vel D E æquale. Itaque in fine tertii temporis grave invenietur in G. Velocitatem vero hic habebit triplam jam ejus quam habebat in B, in fine primi temporis: quia præter celeritatem acquiſitam in E, quam diximus duplam eſſe acquiſitæ in B, vis gravitatis, temporis tertii decurſu, æqualem rurſus atque in fine primi celeritatem contulit. Quamobrem utraque celeritas, in fine temporis tertii, triplam celeritatem conſtituet ejus quæ fuerat in fine temporis primi.

Eodem modo oſtendetur tempore quarto peragi debere & ſpatium G H triplum ſpatii B D, & ſpatium H K ipſi A B æquale: velocitatemque in K, in fine quarti temporis, fore quadruplam ejus quæ fuerat in B, in fine temporis primi. Atque ita ſpatia quotlibet deinceps conſiderata, quæ æqualibus temporibus peracta fuerint, æquali exceſſu, qui ipſi B D æqualis ſit, creſcere manifeſtum eſt; ſimulque etiam velocitates per æqualia tempora æqualiter augeri.



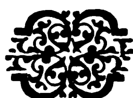
PROPOSITIO II.

Spatium peractum certo tempore à gravi, è quiete casum inchoante, dimidium est ejus spatii quod pari tempore transiret motu æquabili, cum velocitate quam acquisivit ultimo casus momento.

Ponantur quæ in propositione præcedenti, ubi quidem A B erat spatium certo tempore, à gravi cadente ex A, peractum. B D vero spatium quod pari tempore transiri intelligebatur celeritate æquabili, quanta acquisita erat in fine primi temporis, seu in fine spatii A B. Dico itaque spatium B D duplum esse ad A B.

Quum enim spatia primis quatuor æqualibus temporibus à cadente transmissa sint A B, B E, E G, G H, quorum inter se certa quædam est proportio: si eorum temporum dupla tempora sumamus, ut nempe pro primo tempore jam accipiantur duo illa quibus spatia A B, B E, peracta fuere; pro secundo vero tempore duo reliqua quibus peracta fuere spatia E G, G K, oportet jam spatia A E, E K, quæ sunt æqualibus temporibus à quiete peracta, inter se esse sicut spatia A B, B E, quæ æqualibus item temporibus à quiete percurrebantur.

Quum igitur sit ut A B ad B E, ita A E ad E K; & convertendo, ut E B sive D A ad A B ita K E ad E A: erit quoque, dividendo, D B ad B A ut excessus K E supra E A ad E A. Quum sit autem, ex ostensis propositione præcedenti, K E æqualis tum duplæ A B, tum quintuplæ B D: E A vero æqualis tum duplæ A B, tum simplici B D; apparet dictum excessum K E supra E A æquari quadruplæ B D. Sicut igitur D B ad B A ita erit quadrupla D B ad E A: unde E A quadrupla erit ipsius B A: eadem vero E A æquatur, uti diximus, & duplæ A B & simplici B D. ergo B D duplæ A B æqualis erit; quod erat demonstrandum.



PROPOSITIO III.

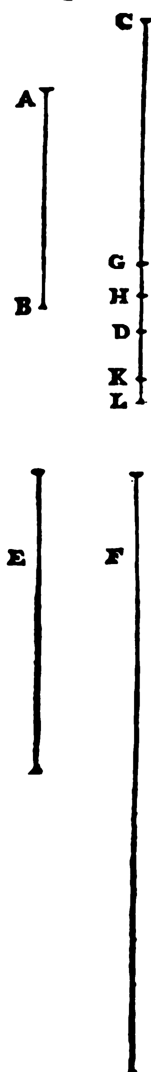
Spatia duo, à gravi cadente quibuslibet temporibus transmissa, quorum utrumque ab initio descensus accipiatur, sunt inter se in ratione duplicata eorundem temporum, sive ut temporum quadrata, sive etiam ut quadrata celeritatum in fine cujusque temporis acquisitarum.

Quum enim ostensum sit propositione antecedenti spatia A B, B E, E G, G K, quotcunque fuerint, æqualibus temporibus à cadente peracta, crescere æquali excessu, qui excessus sit ipsi B D æqualis: Patet nunc, quoniam B D est dupla A B, spatium B E fore triplum A B; E G quintuplum ejusdem A B; G K septuplum; aliaque deinceps auctum iri secundum progressionem numerorum imparium ab unitate, 1, 3, 5, 7, 9, &c. cumque quotlibet horum numerorum, sese consequentium, summa faciat quadratum, cujus latus est ipsa adsumptorum numerorum multitudo (velut si tres primi addantur, facient novem, si quatuor sexdecim) sequitur hinc spatia, à gravi cadente transmissa, quorum utrumque à principio casus inchoetur, esse inter se in ratione duplicata temporum quibus casus duravit, si nempe tempora commensurabilia sumantur.

Facile autem & ad tempora incommensurabilia demonstratio extendetur. Sint enim tempora hujusmodi, quorum inter se ratio ea quæ linearum A B, C D. spatiaque temporibus his transmissa sint E, & F, utraque nimirum ab initio descensus adsumpta. Dico esse, ut quadratum A B ad quadratum C D, ita spatium E ad F.

Si enim negetur; habeat primo, si potest, spatium E ad F majorem rationem quam quadratum A B ad quadratum C D, nempe eam quam quadratum A B ad quadratum C G, sumta C G minore quam C D & à C D auferatur pars D H, minor quam D G excessus C D supra C G, atque ita ut reliqua H C commensurabilis sit ipsi A B; hoc enim fieri posse constat. Erit ergo C H major quam C G. Atqui ut quadratum temporis A B ad quadratum temporis C H, ita spatium E, quod tempore A B peractum est ad spatium peractum tempore C H, per superiùs ostensa. Hoc vero spatio majus est illud quod tempore C D percurritur, nempe spatium F. ergo spatii E ad spatium F minor est ratio quam quadrati A B ad quadratum C H. Sicut autem spatium E ad F, ita ponebatur esse quadratum A B ad quadratum C G; ergo minor quoque erit ra-

tio quadrati A B ad quadratum C G, quam quadrati A B ad quadratum C H, ac proinde quadratum C G majus quadratum C H; quod est absurdum, quum C H major dicta sit quam C G. Non habet igitur spatium E ad F majorem rationem quam quadratum A B ad quadratum C D.



Habeat jam, si potest, minorem; sitque ratio spatii E ad F eadem quæ quadrati A B ad quadratum C L, sumptâ C L majore quam C D, & à C L auferatur L K minor excessu L D, quo C D superatur à C L; atque ita ut reliqua K C sit commensurabilis A B. Quia ergo ut quadratum temporis A B ad quadratum temporis C K, ita est spatium E, peractum tempore A B, ad spatium peractum tempore C K. Hoc vero spatio minus est spatium peractum tempore C D, nempe spatium F. erit proinde spatii E ad F major ratio quam quadrati A B ad quadratum C K. Sicut autem spatium E ad F, ita ponebatur esse quadratum A B ad quadratum C L. Ergo major erit ratio quadrati A B ad quadratum C L quam ejusdem quadrati A B ad quadratum C K, ideoque quadratum C L minus erit quam qu. C K. quod est absurdum, quum C L major sit quam C K. Ergo neque minorem rationem habet spatium E ad F quam quadratum A B ad quadratum C D. quare necesse est ut eandem habeat. Porro cum celeritates in fine temporum A B, C D acquisitæ sint inter se sicut ipsamet tempora; apparet rationem spatiorum E ad F eandem quoque esse quæ quadratorum temporum A B, C D, quibus transmissa sunt. Itaque constat propositum.

PROPOSITIO IV.

SI grave celeritate ea quam in fine descensus acquisivit sursum tendere cœperit, fiet ut paribus temporis partibus, spatia quæ prius sursum, eadem deorsum transeat, adeoque ad eandem unde descenderat altitudinem ascendat. Item ut æqualibus temporis partibus æqualia amittat celeritatis momenta.

Sunto enim ut in propositione 2, spatia quotlibet, æqualibus

temporis partibus cadendo è quiete peracta, quorum primum A B; secundum compositum ex B D, quod celeritate æquabili acquisita per A B transeundum erat, & ex D E ipsi A B æquali; tertium compositum, ex E F, duplo ipsius B D, & ex F G, eidem A B æquali; quartum compositum ex G H, triplo ipsius B D, & ex H K ipsi itidem A B æquali, atque eadem ratione porro crescentia, si plura fuerint. Dico totidem æqualibus temporibus eadem spatia K G, G E, E B, B A, singula singulis peragenda esse à gravi sursum tendente, atque incipiente cum celeritate in fine descensus K acquisita.

Brevitatis autem gratia celeritas quæque designetur deinceps longitudine spatii quod grave motu æquabili, cum celeritate illa, atque temporis parte una, quales in descensu consideravimus, transmissurum esset.

Itaque ex ostensis dicta propositione, cum in K grave pervenerit, habet celeritatem G H auctam celeritate B D, hoc est celeritatem K F, quia K F æquatur ipsis H G, B D, sunt enim partes singulæ H K, F G, æquales ipsi A B, ac proinde utraque simul ipsi B D, quam esse duplam A B ostendimus propositione 2. Itaque celeritatem in fine descensus K acquisitam sursum convertendo, si grave æquabili motu ferretur, conficeret una temporis parte spatium K F. Atqui, gravitatis actione accedente, diminuetur ascensus K F spatio F G ipsi A B æquali, ut patet ex dictis ad hypothesin initio sumptam. Ergo parte prima temporis ascendet grave tantum per K G, quo eodem spatio parte temporis novissima descenderat. Simul vero & celeritati tantum decessisse necesse est, quantum acquiritur temporis parte una deorsum cadendo, hoc est celeritatem B D. Itaque grave, ubi ad G ascenderit, habet celeritatem reliquam H G, cum initio ascensus habuerit celeritatem H G una cum celeritate B D. Est autem ipsi H G æqualis G D; quum æquetur ipsi F E una cum D B, hoc est una cum dupla A B, hoc est una cum duabus F G & E D; Ergo si ex G, cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, conficeret una parte temporis spatium G D. Accedente autem gravitatis actione, diminuetur ascensus iste spatio D E, ipsi A B æquali. Ergo, hac secunda parte temporis, ascendet per spatium G E, quod simili temporis parte etiam cadendo transierat. Simul autem celeritati tantum decessisse denuo debet quantum temporis parte una ex casu acquiritur, nempe celeritas B D. Itaque ubi usque ad

E ascenderit, habet duntaxat celeritatem F E, quæ nimirum relinquitur quum à celeritate G D aufertur celeritas B D. Nam B D, ut jam diximus, æqualis est duabus D E, F G.

Est autem ipsi F E æqualis E A, quum F E æquetur ipsi B D bis sumptæ, hoc est ipsi B D una cum dupla A B, hoc est una cum duabus A B, D E. Ergo si ex E cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, confecturum esset una temporis parte spatium E A. Sed accedente actione gravitatis, diminuetur ascensus iste ipso spatio A B. Proinde hac parte temporis per spatium E B tantum ascendet, quod simili parte temporis descendendo quoque transierat. Hic vero rursus celeritati tantum decessisse necesse est quantum una temporis parte cadendo deorsum acquiritur, hoc est celeritatem B D. Itaque grave, ubi usque ad B ascenderit, habet celeritatem ipsam B D reliquam, cum in E habuerit celeritatem F E ipsius B D duplam. Si ergo ex B cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, confecturum esset parte una temporis spatium æquale ipsi D B, hoc est duplum A B. Sed accedente gravitatis actione, diminuitur ascensus iste spatio quod ipsi A B æquale sit. Igitur hac parte temporis ascendet tantummodo per spatium B A, quod etiam primo descensus tempore transierat. Atque in fine quidem extremi temporis hujus necessario grave in A puncto reperietur. Sed dicetur forsan altius ascendisse quam ad A, atque inde eo relapsum esse. At hoc absurdum esset, cum non possit, motu à gravitate profecto, altius quam unde decidit ascendere. Porro quum celeritati quam in B habebat rursus decesserit celeritas B D, patet jam gravi in A constituto nullam celeritatem superesse, ac proinde non altius excursurum. Itaque ostensum est ad eandem unde decidit altitudinem pervenisse, & singula spatia, quæ æqualibus descensus temporibus transmiserat, eadem totidem ascensus temporibus remensum esse: sed & æqualibus temporibus æqualia ipsi decessisse celeritatis momenta apparuit. Ergo constat propositum.

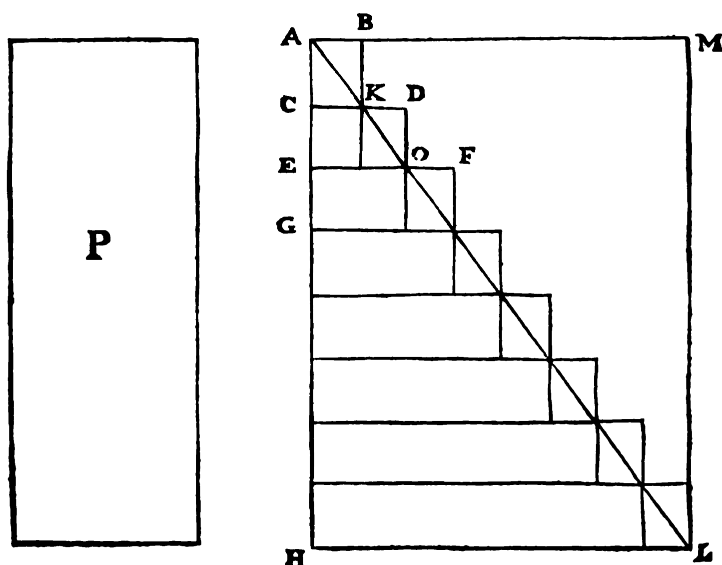
Quia vero in demonstratione propositionis secundæ, ex qua pendet præcedens, adsumptum fuit certam quandam esse proportionem spatiorum quæ continuis æqualibus temporibus à gravi cadente transeuntur, quæque eadem sit, quæcunque æqualia tempora accipiantur; quod quidem & ex rei natura ita se habere necesse est, & si negetur, fatendum frustra proportionem istorum spatiorum investigari. Tamen, quia propositum etiam absque hoc demonstrari potest, Galilei methodum sequendo,

operæ pretium erit demonſtrationem, ab illo minus perfecte traditam, hic accuratius conſcribere. itaque rurſum hic demonſtrabimus, De descensu gravium.

PROPOSITIO V.

Spatium peractum certo tempore, à gravi è quiete caſum inchoante, dimidium eſſe ejus ſpatii quod pari tempore tranſiret motu æquabili, cum celeritate quam acquiſivit ultimo caſus momento.

Sit tempus deſcenſus totius A H, quo tempore mobile peregerit ſpatium quoddam cujus quantitas deſignetur plano P. ducta-



que H L perpendiculari ad A H, longitudinis cujuſlibet, referat illa celeritatem in fine caſus acquiſitam. Deinde completo rectangulo A H L M, intelligatur eo notari quantitas ſpatii quod percurreretur tempore A H, cum celeritate H L. Oſtendendum eſt igitur planum P dimidium eſſe rectanguli M H, hoc eſt, ducta diagonali A L, æquale triangulo A H L.

Si planum P non eſt æquale triangulo A H L, ergo aut minus eo erit, aut majus. Sit primo, ſi fieri poteſt, planum P minus triangulo A H L. dividatur autem A H in tot partes æquales A C, C E, E G &c. ut, circumſcriptâ triangulo A H L figurâ è rectangulis quorum altitudo ſingulis diviſionum ipſius A H partibus æquetur, ut ſunt rectangula B C, D E, F G, alterâque eidem triangulo inſcriptâ, ex rectangulis ejuſdem altitudinis, ut ſunt K E, O G &c. ut, inquam, exceſſus illius figuræ ſupra hanc, minor ſit exceſſu

trianguli A H L supra planum P. hoc enim fieri posse perspicuum est, cum totus excessus figuræ circumscriptæ super inscriptam æquetur rectangulo infimo, basin habenti H L. Erit itaque omnino excessus ipsius trianguli A H L supra figuram inscriptam minor quam supra planum P, ac proinde figura triangulo inscripta major plano P. Porro autem, quum recta A H tempus totius descensus referat, ejus partes æquales A C, C E, E G, æquales temporis illius partes referent. Cumque celeritates mobilis cadentis crescant eadem proportione qua tempora descensus *; sitque celeritas in fine totius temporis acquisita H L; erit ea, quæ in fine primæ partis temporis A C acquiretur, C K; quia ut A H ad A C, ita H L ad C K. Similiter quæ in fine partis temporis secundæ C E acquiritur, erit E O, atque ita deinceps. Patet autem, tempore primo A C, spatium aliquod à mobili transmissum esse, quod majus sit nihilo; tempore vero secundo C E transmissum esse spatium quod majus sit quam K E, quia spatium K E transmissum fuisset tempore C E, motu æquabili, cum celeritate C K. habent enim spatia, motu æquabili transacta, rationem compositam ex ratione temporum, & ratione velocitatum, ideoque cum tempore A H, celeritate æquabili H L percurri posuerimus spatium M H, sequitur tempore C E, cum celeritate C K, percurri spatium K E, quum ratio rectanguli M H ad rectangulum K E componatur ex rationibus A H ad C E, & H L ad E O.

* Prop. 1. huj.

Quum ergo, ut dixi, spatium K E sit illud quod transmitteretur tempore C E, cum celeritate æquabili C K, mobile autem feratur tempore C E motu accelerato, qui jam principio hujus temporis habet celeritatem C K; manifestum est isto accelerato motu, tempore C E, majus spatium quam K E confecturum. Eadem ratione, tempore tertio E G, majus spatium conficiet quam O G, quia nempe hoc confecturum esset tempore eodem E G, cum celeritate æquabili E O. Atque ita deinceps, singulis temporis A H partibus, à mobili majora spatia quam sunt rectangula figuræ inscriptæ, ipsis partibus adjacentia, peragentur. Quare totum spatium motu accelerato peractum majus erit ipsa figura inscripta. Spatium vero illud æquale positum fuit plano P. Itaque figura inscripta minor erit spatio P. quod est absurdum; eodem enim spatio major ostensa fuit. Non est igitur planum P minus triangulo A H L. At neque majus esse ostendetur.

Sit enim, si potest; & dividatur A H in partes æquales, atque ad earum altitudinem, inscripta circunscriptaque rursus,

ut ante, sit triangulo A H L figura ex rectangulis, ita ut altera alteram excedat minori excessu quam quo planum P superat triangulum A H L, erit igitur necessario figura circumscripta minor plano P. Constat jam, prima temporis parte A C, minus spatium à mobili transmitti quam sit B C, quia hoc percurreretur eodem tempore A C cum celeritate æquabili C K, quam demum in fine temporis A C mobile adeptum est. Similiter secunda parte temporis C E, minus spatium motu accelerato transmittetur quam sit D E, quia hoc percurreretur eodem tempore C E, cum celeritate æquabili E O, quam demum in fine temporis C E mobile assequitur. Atque ita deinceps, singulis partibus temporis A H, minora spatia à mobili trajicientur quam sunt rectangula figuræ circumscriptæ, ipsis partibus adjacentia. Quare totum spatium motu accelerato peractum, minus erit ipsa figura circumscripta. Spatium vero illud æquale positum fuit plano P; ergo planum P minus quoque erit figura circumscripta. quod est absurdum, cum figura hæc plano P minor ostensa fuerit. Ergo planum P non majus est triangulo A H L, sed nec minus esse jam ostensum fuit. Ergo æquale sit necesse est; quod erat demonstrandum.

Et hæc quidem omnia quæ hactenus demonstrata sunt, gravibus per plana inclinata descendentibus atque ascendentibus æque ac perpendiculariter motis convenire sciendum est: cum, quæ de effectu gravitatis posita fuerunt, eadem ratione utrobique sint admittenda.

Hinc vero non difficile jam erit demonstrare propositionem sequentem quam concedi sibi, ut quodammodo per se manifestam, Galileus postulavit. nam demonstratio illa quam postea adferre conatus est, quæque in posteriori operum ejus editione extat, parum firma meo quidem judicio videtur. Est autem propositio hujusmodi.

PROPOSITIO VI.

Celeritates gravium, super diversis planorum inclinationibus descendendo acquisitæ, æquales sunt, si planorum elevationes fuerint æquales.

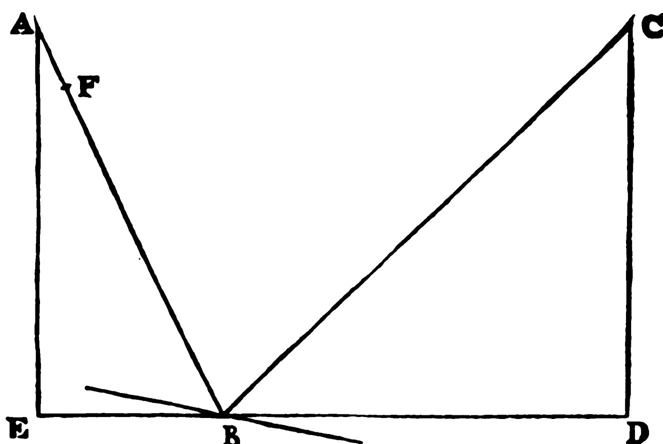
Elevationem plani vocamus altitudinem ejus secundum perpendiculum.

Sunto itaque plana inclinata, quorum sectiones factæ plano ad horizontem erecto, A B, C B; quorumque elevationes A E, C D

sint æquales; & cadat grave ex A per planum A B, & rursus ex C per planum C B. dico utroque casu eundem gradum velocitatis in puncto B acquisiturum.

Si enim per C B cadens minorem velocitatem acquirere dicatur quam cadens per A B, habeat ergo, per C B cadens, eam duntaxat quam per F B acquireret, posita nimirum F B minore quam A B. Acquiret autem per C B cadens eam velocitatem qua rursus per totam B C possit ascendere.* Ergo & per F B acquiret eam

* Prop. 4. huj.



velocitatem qua possit ascendere per totam B C. Ideoque cadens ex F in B, si continuet porro motum per B C; quod repercussu ad superficiem obliquam fieri potest; ascendet usque in C, hoc est, altius quam unde decidit, quod est absurdum.

Eodem modo ostendetur neque per planum A B decidenti minorem velocitatem acquiri quam per C B. Ergo per utraque plana eadem velocitas acquiritur, quod erat demonstrandum.

Quod si vero, pro plano alterutro, sumatur perpendiculum ipsum planorum elevationi æquale, per quod decidere mobile ponatur, sic quoque eandem quam per plana inclinata velocitatem ei acquiri constat; eadem namque est demonstratio.

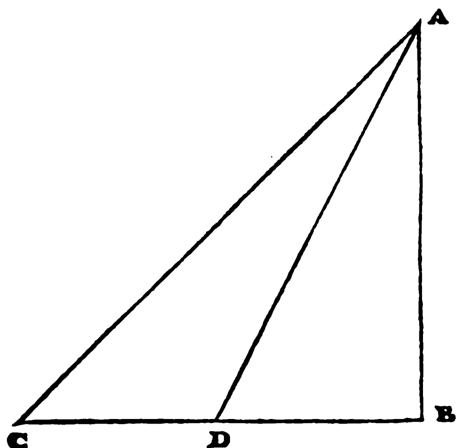
Porro hinc jam recte quoque procedet demonstratio alterius theorematis Galileani, cui reliqua omnia, quæ de descensu super planis inclinatis tradidit, superstruuntur. Nempe

PROPOSITIO VII.

Tempora descensuum super planis diversimode inclinatis, sed quorum eadem est elevatio, esse inter se ut planorum longitudines.

Sint plana inclinata A C, A D quorum eadem elevatio A B. dico tempus

tempus descensus per planum A C ad tempus descensus per A D esse ut longitudo A C ad A D. Est enim tempus per A C æquale tempori motus æquabilis per eandem A C, cum celeritate dimidia ejus quæ acquiritur casu per A C*. Similiter tempus per A D est æquale tempori motus æquabilis per ipsam A D, cum dimidia ce- De descensu gravium. * Prop. 2. huj.



leritate ejus quæ acquiritur casu per A D. Est autem hæc dimidia celeritas illi dimidiæ celeritati æqualis *, ideoque dictum tempus motus æquabilis per A C, ad tempus motus æquabilis per A D, erit ut A C ad A D. Ergo & tempora singulis istis æqualia, nimirum tempus descensus per A C, ad tempus descensus per A D, eandem rationem habebunt, nempe quam A C ad A D. quod erat demonstrandum. *Prop. præced.

Eodem modo ostendetur & tempus descensus per A C, ad tempus casus per A B perpendicularem, esse ut A C ad A B longitudine.

PROPOSITIO VIII.

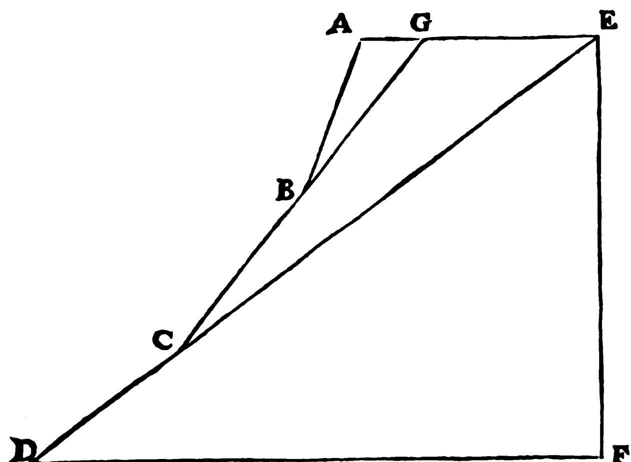
Si ex altitudine eadem descendat mobile continuato motu per quotlibet ac qualibet plana contigua, utcunque inclinata; semper eandem in fine velocitatem acquiret, quæ nimirum æqualis erit ei quam acquireret cadendo perpendiculariter ex pari altitudine.

Sint plana contigua A B, B C, C D, quorum terminus A, supra horizontalem lineam D F per infimum terminum D ductam, altitudinem habeat quanta est perpendicularis E F. descendatque mobile per plana illa ab A usque in D. Dico in D eam velocitatem habiturum quam, ex E cadens, haberet in F.

Producta enim C B occurrat rectæ A E in G. Itemque D C producta

occurrat eidem A E in E. Quoniam itaque per A B descendens eandem acquirit velocitatem in termino B, atque descendens per G B*; manifestum est, cum flexus ad B nihil obstare motui ponatur, tantam velocitatem habiturum ubi in C pervenerit, quantam si per G C planum descendisset; hoc est, quantam ha-

*Prop. 6. huj.



beret ex descensu per E C. Quare & reliquum planum C D eodem modo transibit ac si per E C advenisset, ac proinde in D denique parem velocitatem habebit, ac si descendisset per planum E D, hoc est, eandem quam ex casu perpendiculari per E F. quod erat demonstrandum.

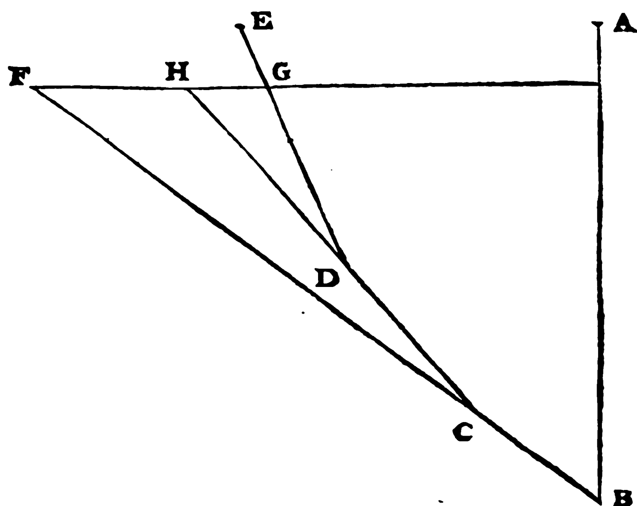
Hinc liquet etiam per circuli circumferentiam, vel per curvam quamlibet lineam descendente mobili (nam curvas tanquam ex infinitis rectis compositæ essent hic considerare licet) semper eandem illi velocitatem acquiri si ab æquali altitudine descenderit: tantamque eam esse velocitatem, quantam casu perpendiculari ex eadem altitudine adipisceretur.

PROPOSITIO IX.

SI grave, à descensu, sursum convertat motum suum, ascendet ad eandem unde venit altitudinem, per quascunque planas superficies contiguas, & quomodocunque inclinatas, incesserit.

Cadat grave ex altitudine A B, & ex puncto B inclinata sint sursum plana B C, C D, D E, quorum extremitas E sit eadem altitudine cum puncto A. Dico si mobile, post casum per A B, convertat motum ut pergat moveri per dicta plana inclinata, perventurum usque in E.

Dicatur enim, si fieri potest, tantum ad G perventurum. Producantur B C & C D, donec occurrant horizontali G F in F & H. Cum igitur mobile, superatis planis B C, C D, habeat tantum eam velocitatem quâ possit ascendere per D G, vel per D H; nam ad hæc utraque eadem velocitate opus esse constat ex propositione



6; Ergo, superato plano B C, eam duntaxat habebat qua potuisset ascendere per C H, vel per C F. Ergo in B duntaxat eam qua potuisset ascendere per B F, hoc est, eandem quam acquireret descendendo per F B. Atqui in B habet velocitatem qua potest ascendere usque in A. Ergo illa velocitate quam acquirit grave descendendo per F B, posset ascendere per B A, hoc est, altius quam unde discesserat, quod fieri non potest.

Est autem eadem prorsus demonstratio quotcunque plana fuerint per quæ mobile ascendat. Vnde & si infinita fuerit planorum multitudo, hoc est, si superficies aliqua curva ponatur, per hanc quoque ad eam ex qua venit altitudinem mobile assurget.

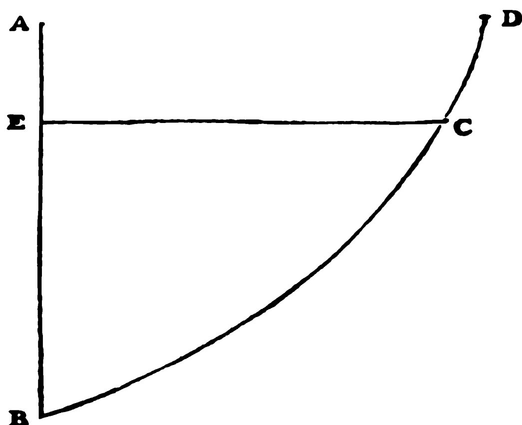
PROPOSITIO X.

Si mobile cadat perpendiculariter, vel per quamlibet superficiem descendat, ac rursus impetu concepto per quamlibet aliam feratur sursum, habebit ascendendo ac descendendo in punctis æque altis eandem semper velocitatem.

Vt si mobile ex altitudine A B decidens, motum deinde continuet per superficiem B C D, in qua punctum C sit pari altitudine atque in A B est punctum E. Dico in C eandem velocitatem inesse mobili atque in E fuerat.

De descensu gravium.

Quum enim in C ea velocitas superſit mobili qua porro aſcendat

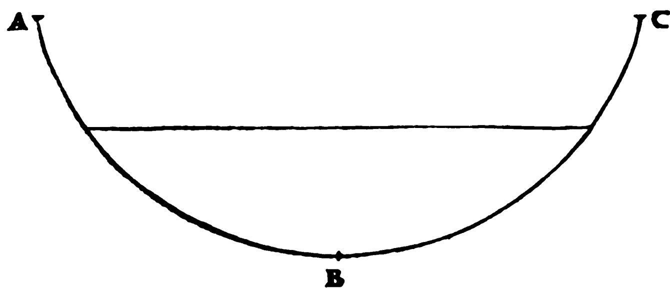


Prop. præced. uſque ad D punctum, æque altum ac A: cumque & ex deſcenſu per A E velocitatem eam acquirat qua, converſo motu, aſcenſurum *Prop. præced. ſit per C D*; Patet cum pervenit ad C aſcendendo, eandem ipſum habere velocitatem, quam habebat in E deſcendendo; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XI.

SI mobile per ſuperficiem aliquam deorſum tendat, ac deinde converſo motu ſurſum per eandem ſuperficiem vel aliam ſimilem ſimiliterque poſitam feratur, æqualibus temporibus per idem ſpatium deſcendet atque aſcendet.

Velut ſi per ſuperficiem A B deſcendat mobile, atque, ubi ad B



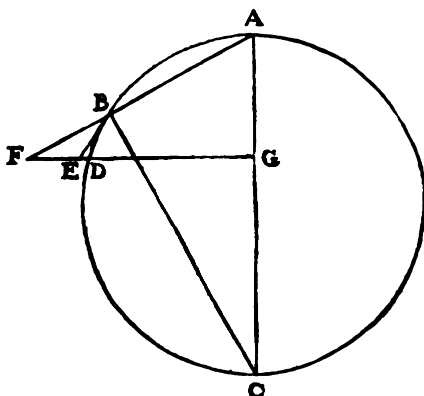
pervenerit, converſo motu ſurſum per eandem A B, vel ei ſimilem & reſpectu plani horizontalis ſimiliter poſitam B C, aſcendat, conſtat ex ante demonſtratis, perventurum ad eandem ex qua venit altitudinem. Cum autem perpetuo, in punctis quorum *Prop præced. eadem altitudo, eandem velocitatem habeat aſcendendo ac deſcendendo*; apparet eandem lineam bis eadem velocitate ſingulis ſui partibus percurri: unde & tempora utriuſque motus æqualia eſſe neceſſe eſt; quod erat demonſtrandum.

De descensu gravium.

PROPOSITIO XII.

Esto circulus ABC, *diametro* AC, *cui ad angulos rectos sit* FG; *huic vero occurrat à termino diametri* A *educta* AF *extra circulum, quæ quidem necessario secabit circumferentiam, puta in* B. *Dico arcum* BD, *lineis* GF, AF *interceptum, minorem esse recta* DF.

Iungatur enim BC, & ducatur ex B puncto tangens circumferentiam



rentiam recta BE, quæ necessario occurret rectæ FG inter F & D. Est igitur angulus BAC in circulo æqualis angulo EBC*. quare & angulus FBE, qui una cum EBC constituit angulum rectum FBC, erit æqualis BCA. Quia autem similia sunt triangula ABC, AGF, erit & angulus F æqualis angulo ACB. Ergo idem angulus F æqualis angulo FBE. Itaque isosceles est triangulus FEB, habens crura æqualia FE, EB. Addita ergo utrique eorum recta ED, fiet FD, æqualis duabus BE, ED. Hasce vero duas majores esse constat arcu BD, iisdem terminis intercepto, & in eandem partem cavo. Ergo & FD eodem arcu BD major erit: quare constat propositum.

PROPOSITIO XIII.

Iisdem positis, si recta AB *occurrat ipsi* DG *intra circulum; Dico arcum* BD, *rectis* GD, AB *interceptum, majorem esse recta* DF.

Iungatur enim DC & ducatur arcui DB subtensa DB. Quoniam ergo angulus ABD æqualis ACD, hoc est, angulo ADG; angulus autem DFB major angulo ADF, sive ADG; erit

idem D F B etiam major D B F. Ergo in triangulo D F B latus D B majus latere D F; unde multo magis arcus D B ſuperabit eandem D F. Quare conſtat propoſitum.

PROPOSITIO XIV.

Sit cyclois A B C *cujus baſis* A C *axis* B D. *Quomodo autem generetur ex definitione & deſcriptione mechanica ſuperius traditis ſatis manifeſtum arbitror. Et circa axem* B D, *circulus deſcriptus ſit* B G D, *& à quolibet puncto* E *in cycloide ſumpto agatur* E F *baſi* A C *parallela, quæ occurrat axi* B D *in* F, *ſecetque circumferentiam* B G D *in* G, *Dico rectam* G E *arcui* G B *æqualem eſſe.*

Deſcribatur enim per E punctum circulus L E K ipſi B G D æqualis, quique tangat baſin cycloidis in K, & ducatur diameter K L. Eſt igitur recta A K arcui E K æqualis; ſed tota A D æqualis ſemicircumferentiæ K E L; ergo K D æqualis arcui E L ſive G B. Eſt autem K D ſive N F æqualis E G, quoniam E N æqualis G F, & communis utrique N G. Ergo conſtat & G E æqualem eſſe arcui G B.

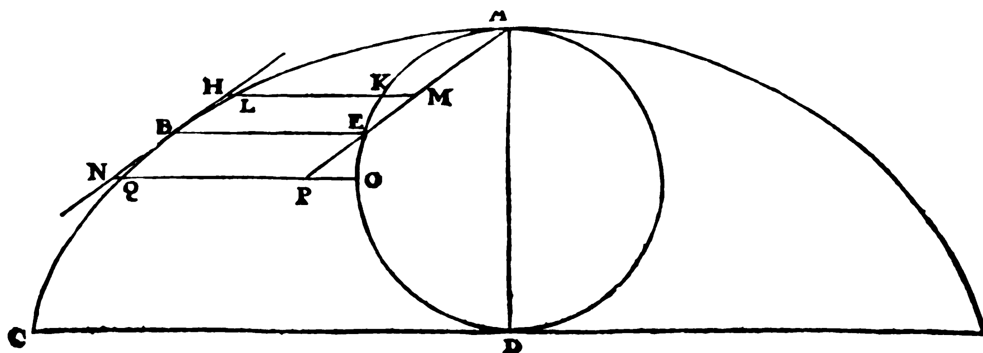
PROPOSITIO XV.

Dato in Cycloide puncto, rectam per illud ducere quæ Cycloidem tangat.

Sit cyclois A B C, & punctum in ea datum B, per quod tangentem ducere oporteat.

Circa axem cycloidis A D describatur circulus genitor A E D, & ducatur B E parallela basi cycloidis, quæ dicto circulo occurrat in E, & jungatur A E, cui denique parallela per B agatur H B N. Dico hanc cycloidem in B contingere.

Sumatur enim in ea punctum quodlibet, à B diversum, ac pri-

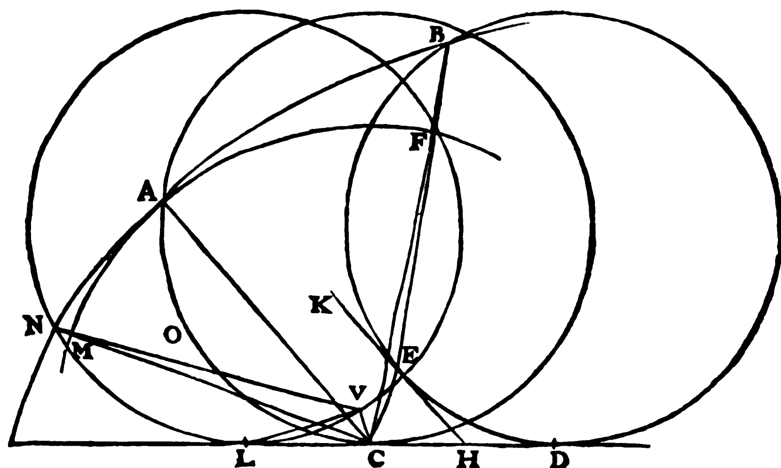


mo versus superiora velut H, & per H ducatur recta basi cycloidis parallela, quæ occurrat cycloidi in L, circulo A E D in K, rectæ A E in M. Quia ergo K L est æqualis arcui K A, recta autem K M minor arcu K E, erit recta M L minor arcu A E, hoc est, rectâ E B, sive M H; unde apparet punctum H esse extra cycloidem.

Deinde in recta H N sumatur punctum N inferius B, & per N agatur, ut ante, basi parallela, quæ occurrat cycloidi in Q, circulo A E D in O, rectæ A E productæ in P. Quia ergo O Q, æqualis est arcui O A; O P autem major arcu O E; erit P Q minor arcu E A, hoc est, rectâ E B, sive P N. Vnde apparet rursus punctum N esse extra cycloidem. Cum igitur quodlibet punctum præter B, in recta H B N sumptum, sit extra cycloidem, constat illam in puncto B cycloidem contingere; quod erat demonstrandum.

Huic demonstrationi an locum suum hic relinquerem dubitavi, quod non multum ei absimilem à clarissimo VVrennio editam inveniam in libro VVallisij de Cycloide. Potest autem & universali constructione propositum absolvi, quæ non cycloidi tantum sed & aliis curvis, ex cujuslibet figuræ circumvolutione genitis, conveniat; dummodo sit figura in eandem partem cava, & ex iis quæ geometricæ vocantur.

Sit enim curva N A B, orta ex circumvolutione figuræ O L ſuper regula L D; deſcribente nempe puncto N, in circumferentia figuræ O L ſumpto. Et oporteat ad punctum curvæ A tangente ducere. Ducatur recta C A à puncto C, ubi figura regulam tangebat cum punctum deſcribens eſſet in A: quod punctum contactus ſemper inveniri poteſt, ſiquidem eo reducitur problema ut duæ rectæ inter ſe parallelæ ducendæ ſint, quarum altera tranſeat per punctum deſcribens in figuræ ambitu datum, altera figuram tangat, quæque inter ſe diſtent quantum diſtat punctum datum A ab regula L D: dico ipſam C A occurrere curvæ ad angulos rectos, ſive circumferentiam M A F deſcriptam centro C radio C A, tangere curvam in puncto A, unde perpendicularis ad A C per punctum A ducta curvam ibidem continget.



Ducatur enim C B primum ad punctum curvæ B, quod diſtet ultra punctum A ab regula L D, intelligaturque figuræ poſitus in B E D, cum punctum deſcribens eſſet in B, contactus regulæ in D. & punctum curvæ quod erat in C, cum punctum deſcribens eſſet in A, hic jam ſublatum ſit in E; & jungantur E C, E B, tangatque figuram in E recta K H, occurrens regulæ in H.

Quia ergo recta C D æqualis eſt curvæ E D; eadem vero curva major eſt utraque ſimul E H, H D; erit E H major quam C H. Vnde angulus E C H major quam C E H, & proinde E C L minor quam C E K. Atqui addendo angulum K E B, qui æqualis eſt L C A, ad K E C, fit angulus C E B: & auferendo ab E C L angulum L C B, fit E C B. Ergo angulus C E B major omnino angulo E C B. Itaque in triangulo C E B, latus C B majus erit quam E B. ſed E B æquale patet eſſe C A, cum ſit idemmet ipſum unà cum figura tranſpoſitum.

tum. Ergo C B etiam major quam C A, hoc eſt, quam C F. unde conſtat punctum B eſſe extra circumferentiam M A F.

Sit rurſus punctum N in curva ſumptum inter regulam L D & punctum A. Cumque punctum deſcribens eſſet in N, ponatur ſitus figuræ fuiſſe in V L, punctumque contactus L, punctum verò quod tangebat prius regulam in C, ſit jam ſublatum in V: & jungantur C N, N V, V C, V L. Erit ergo V N æqualis C A; imo erit ipſa C A tranſlata in V N. Iam quia recta L C æquatur curvæ L V, ac proinde major eſt recta L V, erit in triangulo C L V angulus L V C major quam L C V. Quare addito inſuper angulo L V N ad L V C, fiet totus N V C major utique quam L C V, ac proinde omnino major angulo N C V, qui pars eſt L C V. Ergo in triangulo C V N latus C N majus erit latere V N, cui æquatur C A, ideoque C N major quoque quam C A, hoc eſt quam C M. Vnde apparet punctum N cadere extra circulum M A F, qui proinde tanget curvam in puncto A. quod erat demonſtrandum.

Eſt autem eadem quoque tum conſtructio tum demonſtratio, ſi curva genita ſit à puncto deſcribente, vel intra vel extra ambitum figuræ circumvolutæ ſumpto. Niſi quod, hoc poſteriori caſu, pars quædam curvæ infra regulam deſcendit, unde nonnulla in demonſtratione oritur diverſitas.

Sit enim punctum A, per quod tangens ducenda eſt, datum in parte curvæ N A B, quæ infra regulam C L deſcendit, deſcripta nimirum à puncto N extra figuram revolutam ſumpto, ſed certam

De descensu gravium.

positionem in eodem ipsius plano habente. Invento igitur puncto C, ubi figura revoluta tangit regulam C D quum punctum describens esset in A, ducatur recta C A. Dico hanc curvæ N A B occurrere ad rectos angulos, sive circumferentiam radio C A centro C descriptam tangere curvam N A B in puncto A. Ostendetur autem exterius ipsam contingere, cum in curvæ parte supra regulam C D posita interius contingat.

Positis enim & descriptis iisdem omnibus quæ prius, ostenditur rursus angulus E C H major quam C E H. atqui ad E C H addito H C B fit angulus E C B; & à C E H auferendo H E B, qui æqualis est D C A, fit angulus C E B. Ergo E C B major omnino quam C E B. unde in triangulo E C B latus E B majus quam C B. sed ipsi E B æqualis est C A, sive C F. Ergo & C F major quam C B: ideoque punctum circumferentiæ F est ultra curvam N A B à centro remotum.

Item rursus ostenditur angulus L V C major L C V. Quare C V P, qui cum L V C duos rectos æquat, minor erit quam V C D. Atqui addendo ad V C D angulam D C N, fit V C N; & auferendo ab C V P angulum P V N, fit C V N. Ergo angulus V C N omnino major quam C V N. In triangulo itaque C V N, latus V N majus erit quam C N. Est autem ipsi V N æqualis C A sive C M. Ergo & C M major quam C N, ideoque punctum circumferentiæ M erit ultra curvam N A B à centro C remotum. Itaque constat circumferentiam M A F tangere curvam in puncto A. quod erat demonstrandum.

Quod si punctum curvæ per quod tangens ducenda est, sit illud ipsum ubi regula curvam secat, erit tangens quæsita semper regulæ perpendicularis; ut facile esset ostendere.

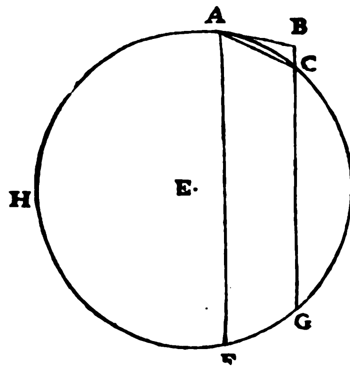
PROPOSITIO XVI.

De motu in Cycloide.

SI circuli circumferentiam, cujus centrum E, *secent rectæ duæ parallelæ* A F, B G, *quarum utraque ad eandem partem centri transeat, vel altera* A F *per centrum ipsum: & à puncto* A, *quo centro propior circumferentiam secat, ducatur recta ipsam contingens: dico partem hujus* A B, *à parallela utraque interceptam, minorem esse arcu* A C, *ab utraque eadem parallela intercepto.*

Ducatur enim arcui A C subtensa recta A C. Quia ergo angulus B A F est æqualis ei quem capit portio circuli A H F, quæ vel major est semicirculo vel semicirculus, erit proinde angulus B A F,

vel minor recto vel rectus; ideoque angulus A B C vel major recto vel rectus. Quare in triangulo A B C latus A C, angulo B sub-

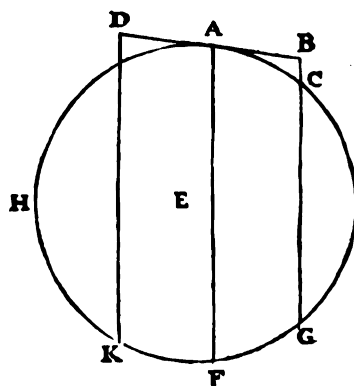


tensum, majus erit latere A B. sed idem latus A C minus est arcu A C. Ergo omnino & A B arcu A C minor erit.

PROPOSITIO XVII.

Iisdem positis, si tertia recta prioribus parallela D K, *circulum secuerit, quæ ab ea quæ centro propior est* A F, *tantumdem distet quantum hæc à reliqua* B G: *dico partem tangentis in* A, *à parallela ultimo adjecta, & media interceptam, nempe* A D, *arcu* A C *à primis duabus parallelis intercepto minorem esse.*

Hoc enim patet quum A D ipsi A B æqualis sit, quam antea ostendimus arcu A C minorem esse.

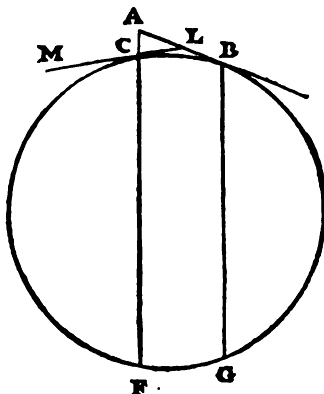


PROPOSITIO XVIII.

SI circulum, cujus centrum E, *duæ rectæ parallelæ secuerint* A F, B G; *& à puncto* B, *ubi quæ à centro remotior est, vel tantundem atque altera distat, circumferentiæ oc-*

currit, ducatur recta circumferentiam tangens: erit pars hujus B A, *à parallelis intercepta, major arcu ab iisdem parallelis intercepto* B C.

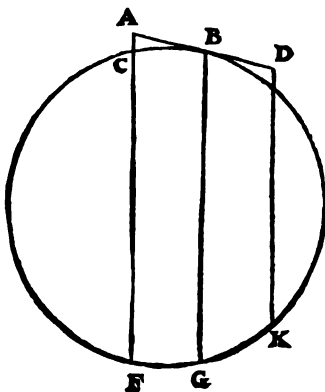
Ducatur enim in puncto C, recta M C L circumferentiam tangens, quæ occurrat tangenti B A in L. In triangulo igitur A C L,



angulus C æqualis est angulo M C F, hoc est, ei quem capit portio circuli C B F. angulus autem A æquatur angulo quem capit portio circuli B C G, quæ portio quum sit major vel æqualis portioni C B F, quippe quum B G vel ulterius distet à centro quam C F, vel tantundem: erit proinde trianguli A C L angulus A minor vel æqualis angulo C: & consequenter latus C L vel minus vel æquale lateri A L. Atqui C L una cum L B majores sunt arcu C B. Ergo & A L. una cum L B, hoc est, tangens A B, eodem arcu C B major erit. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

I*Isdem positis, si tertia recta prioribus parallela* D K *circulum secet, quæ tantundem distet ab ea quæ remotior est à*



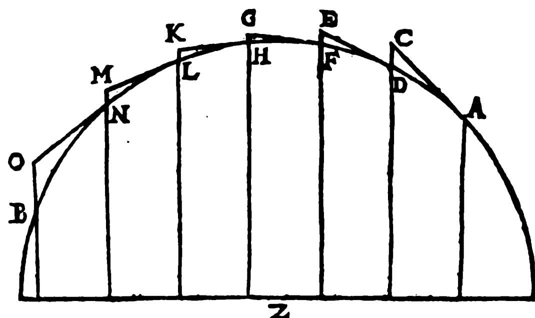
centro quantum hæc à reliqua A F: *Erit pars tangentis in* B,

à parallela media, & ultimo addita D K, *intercepta, nimirum* B D, *major arcu* B C. DE MOTU IN CYCLOIDE.

Hoc enim manifestum est cum B D fiat ipsi B A æqualis, quam ostendimus arcu B C majorem esse.

PROPOSITIO XX.

SI arcus circuli, semicircumferentia minor, A B, *in partes quotlibet secetur lineis rectis parallelis, quæ & inter se, & cum rectis sibi parallelis per terminos arcus ductis, æqualia intervalla constituant, quales sunt* C D, E F, G H, K L *&c. ducanturque ad terminum arcus alterutrum* A, *& ad reliqua omnia sectionum puncta rectæ circumferentiam tangentes, omnes in eandem partem, & ut unaquaque occurrat proxima dictarum parallelarum; cujusmodi sunt tangentes* A C, D E, F G, H K *&c. Dico has tangentes, dempta prima* A C, *simul sumptas, minores esse arcu proposito* A B. *Easdem vero omnes, non omissa* A C, *majores esse arcu* A B *diminuto parte extrema* N B, *hoc est, majores arcu* A N.



Ponamus enim primo parallelarum aliquas transire ab utraque parte centri Z, & sit G H, earum quæ sunt à parte B, centro proxima, vel per ipsum centrum transeat. Itaque tangentes omnes inter G H & B O comprehensæ, ut H K, L M, N O, singulæ suis arcubus minores sunt *. Porro autem & tangens G F, arcu sequente F D minor est *, & similiter tangens E D arcu D A. Itaque tangentes omnes inter B O & C D interjectæ, minores sunt arcubus B H & F A, ac proinde omnino minores arcubus B H, H A, sive arcu B A, quod erat primo ostendendum.

*Prop. 16. huj.

*Prop. 17. huj.

Porro jam demonstrabimus tangentes omnes inter B O & A majores esse arcu A N. Enimvero parallela G H, vel propius centrum Z transit quam parallela E F, quam pono proximam esse

earum quæ à parte A transeunt, vel erit remotior, vel æque distabit.

Quod si E F longius à centro vel æque remota est ac G H, erit tangens F G major arcu suo F H, & reliquæ tangentes versus A, nimirum E D, C A majores singulæ arcubus suis *; adeo ut omnes simul G F, E D, C A majores sint arcu H A. sed & arcu H L major erit tangens L M *, & arcu L N tangens N O; itaque tangentes omnes, præter H K, majores simul erunt arcu A N; multoque magis, accedente ipsa H K, tangentes omnes inter A & B comprehensæ arcu eodem A N majores erunt.

*Prop.18. huj.

* Prop.19.huj.

Si vero G H à centro longius distat quam E F, erit tangens K H major arcu H F *, & tangens M L ut ante major arcu L H, & tangens O N major arcu N L, & omnes proinde tangentes O N, M L, K H majores arcu N F. Sed & tangens E D major est arcu suo F D *, & tangens C A major similiter arcu suo D A. Itaque tangentes omnes inter B O & A, præter G F, majores erunt arcu N A; multoque magis tangentes eædem, accedente G F, hoc est, omnes quæ inter B O & A interjiciuntur, eodem arcu N A majores erunt.

* Prop.19.huj.

* Prop.18.huj.

Ex his vero etiam demonstratio manifesta est in casibus aliis, qualiscunque semicircumferentiæ arcus accipiatur, quippe cum vel eadem sit ubique, vel pars tantum præcedentis demonstrationis.

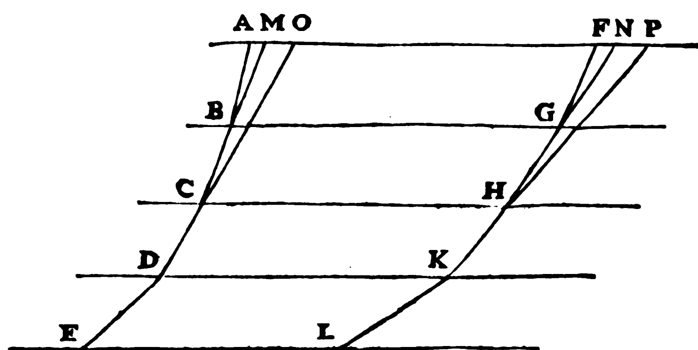
PROPOSITIO XXI.

SI mobile descendat continuato motu per qualibet plana inclinata contigua, ac rursus ex pari altitudine descendat per plana totidem contigua, ita comparata ut singula altitudine respondeant singulis priorum planorum, sed majori quam illa sint inclinatione. Dico tempus descensus per minus inclinata, brevius esse tempore descensus per magis inclinata.

Sint series duæ planorum inter easdem parallelas horizontales comprehensæ A B C D E, F G H K L, atque ita ut bina quæque sibi correspondentia plana utriusque seriei iisdem parallelis horizontalibus includantur; unumquodque vero seriei F G H K H magis inclinatum sit ad horizontem quam planum sibi altitudine respondens seriei A B C D E. Dico breviori tempore absolvi descensum per A B C D E, quam per F G H K L.

Nam primo quidem tempus descensus per A B, brevius esse constat tempore descensus per F G, quum sit eadem ratio horum temporum quæ rectarum A B ad F G*, sitque A B minor quam F G, propter minorem inclinationem. Producantur jam sursum rectæ C B, H G, occurrantque horizontali A F in M & N. Itaque tempus per B C post A B, æquale est tempori per eandem B C post M B,

* Prop. 7. huj.



cum in puncto B eadem celeritas contingat, sive per A B, sive per M B descendenti*. similiterque tempus per G H post F G, æquale erit tempori per eandem G H post N G. Est autem tempus per B C post M B ad tempus per G H post N G, ut B C ad G H longitudine, sive ut C M ad H N, cum hanc rationem habeant & tempora per totas M C, N H, & per partes M B, N G*, ideoque etiam tempora reliqua. Estque B C, minor quam G H propter minorem inclinationem. Patet igitur tempus per B C post M B sive post A B, brevius esse tempore per G H post N G sive post F G.

* Prop. 6. huj.

* Prop. 7. huj.

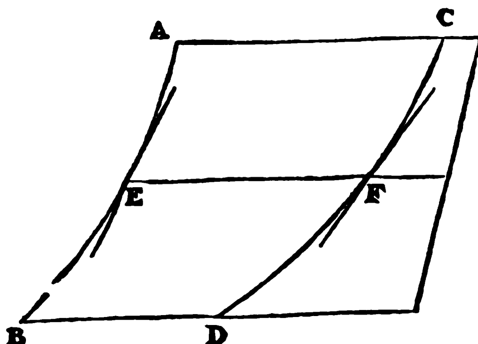
Similiter ostendetur, productis D C, K H sursum, donec occurrant horizontali A F in O & P, tempus per C D post A B C, sive post O C, brevius esse tempore per H K post F G H sive post P H. Ac denique tempus per D E post A B C D, brevius esse tempore per K L post F G H K. Quare totum tempus descensus per A B C D E, brevius erit tempore per F G H K L. quod erat demonstrandum.

Hinc vero manifestum est, considerando curvas lineas tanquam ex innumeris rectis compositas, si fuerint duæ superficies, secundum lineas curvas ejusdem altitudinis inclinatæ, quarum in punctis quibuslibet æque altis major semper sit inclinatio unius quam reliquæ, etiam tempore breviori per minus inclinatam grave descensurum quam per magis inclinatam.

Velut si sint duæ superficies inclinatæ secundum curvas A B, C D, æqualis altitudinis, quarumque in punctis æque altis quibuslibet E, F, major sit inclinatio ipsius C D quam A B, hoc est, ut

De motu in Cycloide.

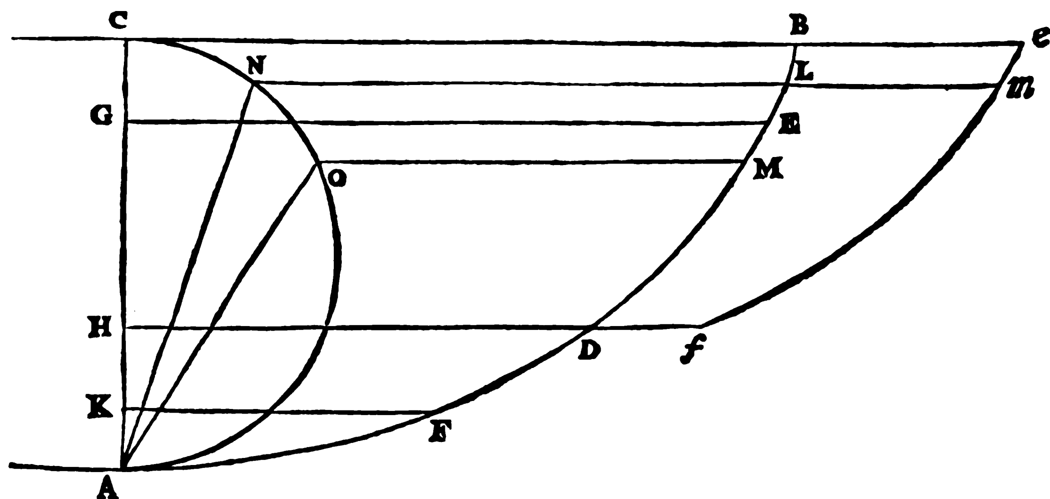
recta tangens curvam C D in F, magis inclinata sit ad horizontem, quam quæ curvam A B tangit in puncto E. erit tempus descensus per A B brevius quam per C D.



Idemque continget si altera linearum rectæ fuerit: dummodo inclinatio rectæ, quæ ubique est eadem, major minorve fuerit inclinatione curvæ in quolibet sui puncto.

PROPOSITIO XXII.

Si in Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus stat, vertice deorsum spectante, duæ portiones curvæ æqualis altitudinis accipiantur, sed quarum altera propior sit vertici; erit tempus descensus per superiorem, brevius tempore per inferiorem.



Sit Cyclois A B, cujus axis A C ad perpendiculum erectus, vertex A deorsum spectet; & accipiantur in ea portiones B D & E F, æqualis altitudinis, hoc est, ejusmodi ut parallelæ horizontales B C, D H, quæ superiorem portionem B D includunt, æque inter

se

ſe diſtent ac E G, F K, inferiorem portionem E F includentes. Dico tempus deſcenſus per curvam B D brevius fore tempore per E F. De motu in Cycloide.

Sumatur enim in B D punctum quodlibet L, & in E F punctum M, ita ut eadem ſit altitudo E ſupra M quæ B ſupra L. Et deſcripto ſuper axe A C ſemicirculo, occurrant ei rectæ horizontales L N, M O, in N & O, & jungantur N A, O A. Itaque quum punctum N ſit altius puncto O, manifeſtum eſt rectam N A minus ad horizontem inclinari quam O A. Eſt autem ipſi N A parallela tangens curvæ in L puncto*, & ipſi O A parallela tangens curvæ in M. Ergo curva B D in puncto L minus inclinata eſt quam curva E F in puncto M. Quod ſi igitur portio E F, invariata inclinatione, altius extolli intelligatur velut in *e f*, ita ut inter eaſdem parallelas cum portione B D comprehendatur, invenietur punctum M in *m*, æquali altitudine cum puncto L. eritque etiam inclinatio curvæ *e f* in puncto *m*, quæ eadem eſt inclinationi curvæ E F in M, major inclinatione curvæ B D in L. Similiter vero, & in quolibet alio puncto curvæ *e f*, major oſtendetur inclinatio quam curvæ B D in puncto æque alto. Itaque tempus deſcenſus per B D brevius erit tempore per *e f**, ſive, quod idem eſt, per E F. quod erat demonſtrandum.

* Prop 15 huj.

*Prop præced.

LEMMA.

Esto circulus diametro A C, *quem ſecet ad angulos rectos* D E, *& à termino diametri* A *educta recta* A B *occurrat circumferentiæ in* B, *ipſi vero* D E *in* F. *Dico tres haſce*, A B, A D, A F, *proportionales eſſe.*

Sit enim primo interſectio F intra circulum; & arcui B D recta ſubtenſa ducatur. Quia igitur arcus æquales ſunt A E, A D, erunt anguli ad circumferentiam ipſis inſiſtentes, E D A, A B D æqua-

les. Itaque in triangulis A B D, A D F, æquales anguli A B D, A D F. Communis autem utrique est angulus ad A. Ergo dicti trianguli similes erunt, ideoque B A ad A D ut A D ad A F.

Sit jam punctum intersectionis *f* extra circulum, & ducatur *b* H parallela D E, quæ occurrat rectæ A D in H. Itaque secundum jam demonstrata erit ut D A ad A *b*, ita A *b* ad A H, hoc est, ita A *f* ad A D: Ideoque rursus proportionales erunt A *f*, A D, A *b*. Quare constat propositum.

PROPOSITIO XXIII.

Sit Cyclois A B C, *cujus vertex* A *deorsum conversus sit, axe* A D *ad perpendiculum erecto; sumptoque in ea quolibet puncto* B, *ducatur inde deorsum recta* B I *quæ Cycloidem tangat, termineturque recta horizontali* A I. *recta vero* B F *ad axem perpendicularis agatur, & divisa bifariam* F A *in* X, *super ea describatur semicirculus* F H A. *Ductâ deinde per punctum quodlibet* G *in curva* B A *sumptum, rectâ* Σ G *parallelâ* B F, *quæ circumferentiæ* F H A *occurrat in* H, *axi* A D *in* Σ, *intelligantur per puncta* G & H *rectæ tangentes utriusque curvæ, earumque tangentium partes iisdem duabus horizontalibus* M S, N T *interceptæ sint* M N, S T. *Iisdemque rectis* M S, N T *includantur tangentis* B I *pars* O P, & *axis* D A *pars* Q R.

Quibus ita se habentibus, dico tempus quo grave percurret rectam M N, *celeritate æquabili quanta acquiritur descendendo per arcum Cycloidis* B G, *fore ad tempus quo percurretur recta* O P, *celeritate æquabili dimidia ejus quæ acquiritur descendendo per totam tangentem* B I, *sicut est tangens* S T *ad partem axis* Q R.

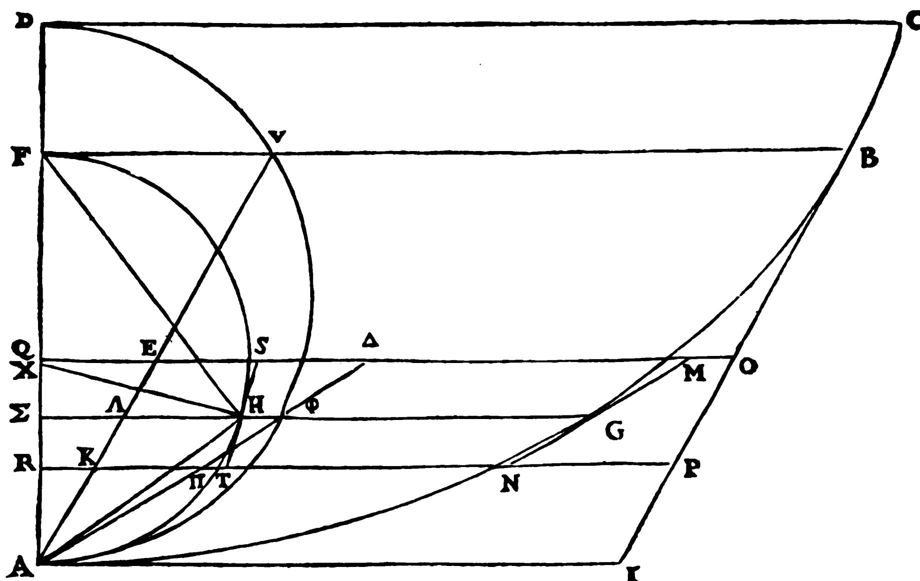
Describatur enim super axe A D semicirculus D V A secans rectam B F in V, & Σ G in Φ, & jungatur A V secans rectas O Q, P R, G Σ in E K & Λ. Iungantur item H F, H A, H X & A Φ; quæ postrema secet rectas O Q, P R in punctis Δ & Π.

Habet ergo dictum tempus per M N ad tempus per O P, rationem eam quæ componitur ex ratione ipsarum linearum M N ad O P, & ex ratione celeritatum quibus ipsæ percurruntur, contrarie sumpta*, hoc est, & ex ratione dimidiæ celeritatis ex B I sive ex F A, ad celeritatem ex B G, sive ex F Σ*. Atqui tota celeritas ex

*Prop. 5. Galil. de motu æquab.
* Prop. 8. huj.

F A ad celeritatem ex F Σ, est in subduplicata ratione longitudinum F A ad F Σ*, ac proinde eadem quæ F A ad F H. Ergo dimidia celeritas ex F A ad celeritatem ex F Σ erit ut F X ad F H. Itaque tempus dictum per M N ad tempus per O P habebit rationem compositam ex rationibus M N, ad O P, & F X ad F H. Harum vero prior ratio, nempe M N ad O P, eadem ostendetur quæ F H ad H Σ.

De motu in Cycloide.
*Prop. 3. huj.



Est enim tangens Cycloidis B I parallela rectæ V A, similiterque tangens M G N parallela rectæ Φ A; ac proinde recta M N æqualis Δ Π, & O P æqualis E K. Ergo dicta ratio rectæ M N ad O P eadem est quæ Δ Π ad E K; hoc est, Δ A ad E A; hoc est, Φ A ad Λ A; hoc est V A ad Φ A *. Est autem ut V A ad A Φ ita F A ad A H; nam quia quadratum V A æquale est rectangulo D A F, & quadratum A Φ æquale rectangulo D A Σ, quæ rectangula sunt inter se ut F A ad Σ A, hoc est ut quadratum F A ad quadratum A H, erit proinde & quadratum V A ad quadratum Φ A ut quadratum F A ad quadratum A H; atque etiam V A ad A Φ longitudine, ut F A ad A H. Ratio itaque M N ad O P, eadem erit quæ F A ad A H, hoc est, propter triangula similia F A H, F H Σ, eadem quæ F H ad H Σ, ut dictum fuit. Itaque dicta ratio temporis per M N ad tempus per O P, componitur ex rationibus F X ad F H & F H ad H Σ, ideoque eadem erit quæ F X sive X H ad H Σ. Sicut autem radius X H ad H Σ, ita est tangens S T ad rectam Q R; hoc enim facile perspicitur. Igitur tempus motus qualem diximus per M N, ad tempus per O P constat esse sicut S T ad Q R. quod erat demonstrandum.

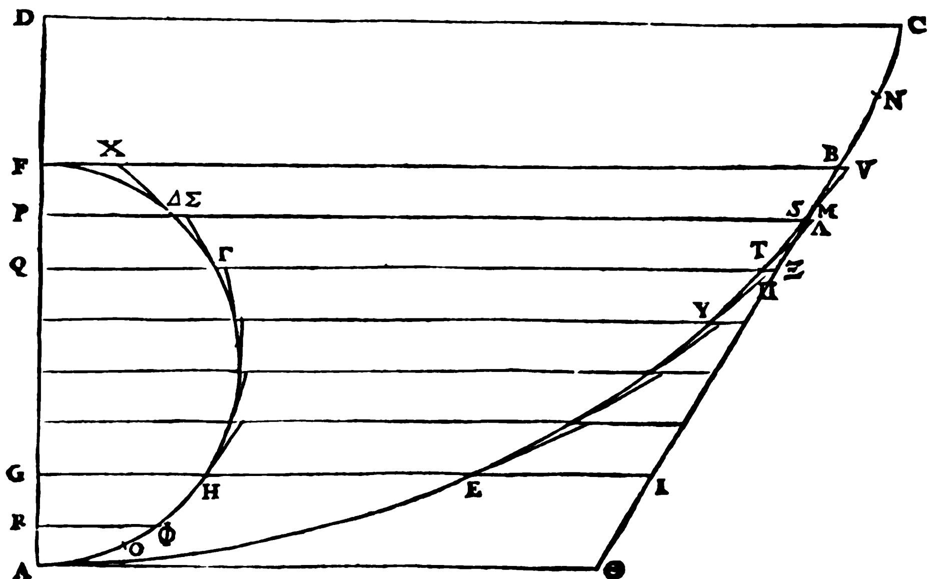
*Lemma præced.

PROPOSITIO XXIV.

Sit rursus ut in præcedenti propositione Cyclois A B C, *cujus vertex* A *deorsum spectet, axis* A D *ad horizontem erectus sit; & sumpto in ea quovis puncto* B, *ducatur inde deorsum recta* B Θ *quæ Cycloidem tangat, occurratque rectæ horizontali* A Θ *in* Θ: *recta vero* B F *ad axem perpendicularis agatur, & super* F A *describatur semicirculus* F H A. *Deinde alia recta* G E, *parallela* F B, *secet Cycloidem in* E, *rectam* B Θ *in* I, *circumferentiam* F H A *in* H, *& denique axem* D A *in* G.

Dico tempus descensus per arcum Cycloidis B E, *esse ad tempus per tangentem* B I *cum celeritate dimidia ex* B Θ, *sicut arcus* F H *ad rectam* F G.

Si enim hoc verum non est, habebit tempus per arcum B E ad dictum tempus per B I, vel majorem rationem quam arcus F H ad rectam F G vel minorem. Habeat primo, si fieri potest, majorem.



Itaque tempus aliquod brevius tempore per B E (sit hoc tempus Z) erit ad dictum tempus per B I ut arcus F H ad rectam F G. Quod si jam in Cycloide supra punctum B sumatur punctum aliud N, erit tempus per B E post N B, brevius tempore per B E. Manifestum est autem punctum N tam propinquum sumi posse ipsi B, ut differentia eorum temporum sit quamlibet exigua, ac proinde ut minor sit ea qua tempus Z superatur à tempore per B E. Sit itaque

punctum N ita sumptum. unde quidem tempus per B E post N B majus erit tempore Z, majoremque proinde rationem habebit ad tempus dictum per B I cum dimidia celeritate ex B Θ, quam arcus F H ad rectam F G. Habeat itaque eam quam arcus F H O ad rectam F G. DE MOTU IN CYCLOIDE.

Dividatur F G in partes æquales F P, P Q, &c. quarum unaquæque minor sit altitudine lineæ N B, atque item altitudine arcus H O; hoc enim fieri posse manifestum est; & à punctis divisionum agantur rectæ, basi D C parallelæ, & ad tangentem B Θ terminatæ P Λ, Q Ξ, &c. Quibusque in punctis hæ secant circumferentiam F H, ab iis, itemque à puncto H, tangentes sursum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut Δ X, Γ Σ &c. Similiter vero & à punctis, in quibus dictæ parallelæ Cycloidi occurrunt, tangentes sursum ducantur velut S V, T M &c. additâ vero ad rectam F G parte una G R æquali iis quæ ex divisione, ductâque R Φ parallelâ similiter ipsi D C, patet eam occurrere circumferentiæ F H A inter H & O, quia G R minor est altitudine puncti H supra O. Iam vero sic porro argumentabimur.

Tempus per tangentem V S cum celeritate æquabili quæ acquireretur ex B S, majus est tempore motus continue accelerati per arcum B S post N B. Nam celeritas ex B S minor est celeritate ex N B, propterea quod minor altitudo B S quam N B. At celeritas ex B S æquabiliter continuari ponitur per tangentem V S, cum celeritas acquisita ex N B continue porro acceleretur per arcum B S, qui arcus minor insuper est tangente V S, omnibusque partibus suis magis erectus quam ulla pars tangentis V S. Adeo ut omnino majus sit futurum tempus per tangentem V S cum celeritate ex B S, tempore per arcum B S post N B. Similiter tempus per tangentem M T, cum celeritate ex B T, majus erit tempore per arcum S T post N S, & tempus post tangentem Π Y cum celeritate ex B Y, majus tempore per arcum T Y post N T. Atque ita tempora motuum æquabilium per tangentes omnes usque ad infimam quæ tangit cycloidem in E, cum celeritatibus per singulas quantæ acquiruntur cadendo ex B adusque punctum ipsarum contactus, majora simul erunt tempore per arcum B E post N B. Eadem vero & minora essent, ut nunc ostendemus.

Considerentur enim denuo tempora eadem motuum æquabilium per tangentes cycloidis. Et est quidem tempus per tangentem V S cum celeritate ex B S, ad tempus per rectam B Λ cum celeritate dimidia ex F Λ, ut tangens circumferentiæ Δ X ad partem

De motu in Cycloide.

* Prop. praeced.

axis F P *. Similiterque tempus per tangentem M T, cum celeritate ex B T, ad tempus per rectam Λ Ξ cum eadem dimidia celeritate ex F A, ut tangens Γ Σ ad rectam P Q. Atque ita deinceps singula tempora per tangentes cycloidis, quæ sunt eadem supradictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes sibi respondentes rectæ B I cum celeritate dimidia ex B Θ, sicut tangentes circumferentiæ F H, iisdem parallelis comprehensæ, ad partes rectæ F G ipsis respondentes.

Sunt igitur quantitates quædam rectæ F P, P Q, &c. & totidem aliæ, tempora scilicet quibus percurruntur rectæ B Λ, Λ Ξ &c, motu æquabili cum celeritate dimidia ex B Θ; Et unaquæque quantitas in prioribus ad sequentem eadem proportione refertur, qua unaquæque posteriorum ad suam sequentem; sunt enim utrobique inter se æquales. Quibus autem proportionibus priores quantitates ad alias quasdam, nempe ad tangentes circuli Δ X, Γ Σ, &c, referuntur, iisdem proportionibus & eodem ordine posteriores quoque referuntur ad alias quasdam, nempe ad tempora motus qualem diximus per tangentes cycloidis V S, M T &c. Ergo, sicut se habent omnes simul priores ad omnes eas ad quas ipsæ referuntur, hoc est, sicut tota F G ad tangentes omnes X Δ, Γ Σ, &c. ita tempus quo percurritur tota B I cum celeritate dimidia ex B Θ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis V S, M T, &c *. Et invertendo itaque, tempora motuum dictorum per tangentes cycloidis, ad tempus per rectam B I cum celeritate dimidia ex B Θ, eandem rationem habebunt quam dictæ tangentes omnes circumferentiæ F H ad rectam F G; ac minorem proinde quam arcus F O ad rectam eandem F G; quia arcus F Φ, ideoque omnino & arcus F O major est dictis omnibus arcus F H tangentibus *. Atqui tempus per B E post N B, ad tempus per B I cum celeritate dimidia ex B Θ, posuimus esse ut arcus F O ad rectam F G. Ergo dicta tempora omnia per tangentes cycloidis minora simul erunt tempore per B E post N B, cum antea majora esse ostensum sit; quod est absurdum. Itaque tempus per arcum cycloidis B E, ad tempus per tangentem B I, cum celeritate dimidia ex B Θ vel ex F A, non habet majorem rationem quam arcus circumferentiæ F H ad rectam F G.

* Prop. 2. Archimedis de Sphæroid. & Conoid.

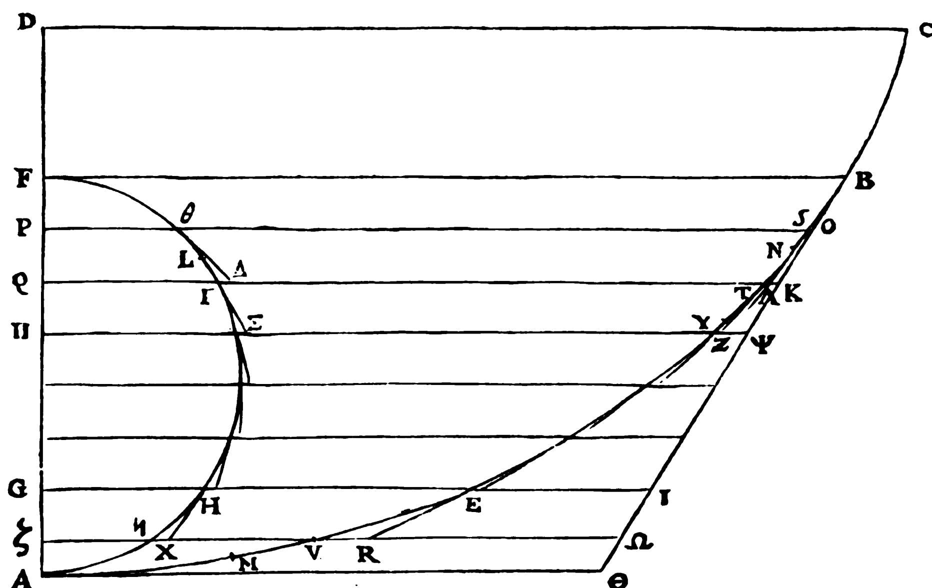
*Prop. 20 huj.

Habeat jam, si potest, minorem. Ergo tempus aliquod majus tempore per arcum B E, (sit hoc tempus Z) erit ad tempus dictum per B I, ut arcus F H ad rectam F G.

Quod si jam sumatur arcus N M æqualis altitudine cum arcu B

E, sed cujus terminus superior N sit humilior puncto B, erit tempus per arcum N M majus tempore per arcum B E*. Manifestum autem quod punctum N tam propinquum sumi potest puncto B, ut differentia dictorum temporum sit quamlibet exigua, ac proinde minor ea qua tempus Z superat tempus per arcum B E. Sit itaque punctum N ita sumptum. Unde quidem tempus per N M minus erit tempore Z, habebitque proinde ad dictum tempus per B I, cum dimidia celeritate ex B Θ, minorem rationem quam arcus F H ad rectam F G. Habeat ergo eam quam arcus L H ad rectam F G.

*Prop. 22. huj.



Dividatur jam F G in partes æquales F P, P Q, &c. quarum unaquæque minor sit arcus cycloidis B N altitudine, itemque minor altitudine arcus circumferentiæ F L; & additâ ad F G unâ earum partium G ζ, ducantur à punctis divisionum rectæ basi D C parallelæ, & ad tangentem B Θ terminatæ, P O, Q K, &c; itemque à puncto ζ recta ζ Ω quæ secet cycloidem in V, circumferentiam in η, quibusque in punctis ductæ parallelæ secant circumferentiam F H, ab iis tangentes deorsum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut θ Δ, Γ Σ: Quarum infima à puncto H ducta occurrat rectæ ζ Ω in X. Similiter vero & à punctis, in quibus dictæ parallelæ occurrunt cycloidi, ducantur totidem tangentes deorsum, velut S Λ, T Ξ, &c. quarum infima, tangens nempe à puncto E ducta, occurrat rectæ ζ Ω in R.

Quia igitur P ζ æqualis est F G altitudini arcus B E, cui æqualis est ex constructione altitudo arcus N M, erit & P ζ æqualis altitudini arcus N M. Est autem recta P O ex constructione superior ter-

mino N. Ergo & ζ Ω, & in ea punctum V, superius termino M. Quare, cum arcus S V æqualis sit altitudinis cum arcu N M, sed termino S sublimiore quam N, erit tempus per S V brevius tempore per N M*.

*Prop. 22 huj.

Atqui tempus per tangentem S Λ, cum celeritate æquabili ex B S, brevius est tempore descensus accelerati per arcum S T, incipientis in S. Nam celeritas ex B S, qua tota S Λ transmissa ponitur, æqualis est celeritati ex S T *, quæ motui per arcum S T in fine demum acquiritur; ipsaque S Λ minor est quam S T. Similiter tempus per tangentem T Ξ, cum celeritate æquabili ex B T, brevius est tempore descensus accelerati per arcum T Y post S T; quum celeritas ex B T, qua tota T Ξ transmissa ponitur, sit æqualis celeritati ex S Y, quæ in fine demum acquiritur motui dicto per arcum T Y post S T; ipsaque T Ξ minor sit arcu T Y. Atque ita tempora omnia motuum æquabilium per tangentes cycloidis, cum celeritatibus per singulas quantæ acquiruntur descendendo ex B usque ad punctum ipsarum contactus, breviora simul erunt tempore descensus accelerati per arcum S V. Eadem vero & longiora essent, ut nunc ostendemus.

*Prop 8. huj.

Est enim tempus dictum per tangentem S Λ, cum celeritate æquabili ex B S, ad tempus per rectam O K cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, sicut tangens semicirculi θ Δ ad rectam P Q*. similiterque tempus per tangentem T Ξ, cum celeritate æquabili ex B T, est ad tempus per rectam K Ψ cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, ut tangens Γ Σ ad rectam Q Π. Atque ita deinceps singula tempora per tangentes cycloidis, quæ sunt eadem supra dictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes sibi respondentes rectæ O Ω, cum celeritate dimidia ex B Θ, ut tangentes circumferentiæ θ η, iisdem parallelis inclusæ, ad partes rectæ P ζ ipsis respondentes. Unde, ut in priori parte demonstrationis, concludetur omnes simul rectas P Q, Q Π &c. hoc est, totam P ζ esse ad omnes simul tangentes θ Δ, Γ Σ, &c. sicut tempus quo percurritur tota O Ω, cum celeritate dimidia ex B Θ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis O Λ, T Ξ, &c. Quare & convertendo, tempora omnia per tangentes cycloidis, eam rationem habebunt ad tempus dictum motus æquabilis per rectam O Ω, sive per B I, quam dictæ tangentes omnes arcus θ η ad rectam P ζ vel F G, ac proinde majorem quam arcus L H ad rectam F G; est enim arcus θ H, adeoque etiam omnino arcus L H, minor dictis tangentibus arcus θ η *. Sed tempus per N M posuimus

*Prop praeced.

*Prop. 20. huj.

mus ab initio ad idem tempus per B I ſe habere ut arcus L H ad rectam F G. Ergo tempus per N M, multoque magis tempus per S V, minus erit tempore per tangentes cycloidis. Quod eſt abſurdum, cum hoc tempus, illo per arcum S V, antea minus oſtenſum fuerit. Patet igitur tempus per arcum cycloidis B E ad tempus per tangentem B I cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, non minorem rationem habere quam arcus F H ad rectam F G. Sed nec majorem habere oſtenſum fuit. Ergo eandem habeat neceſſe eſt. quod erat demonſtrandum.

De motu in Cycloide.

PROPOSITIO XXV.

IN Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus eſt, vertice deorſum ſpectante, tempora deſcenſus quibus mobile, à quocunque in ea puncto dimiſſum, ad punctum imum verticis pervenit, ſunt inter ſe æqualia; habentque ad tempus caſus perpendicularis per totum axem cycloidis eam rationem, quam ſemicircumferentia circuli ad diametrum.

Eſto cyclois A B C cujus vertex A deorſum ſpectet, axis vero A D ad perpendiculum erectus ſit, & à puncto quovis in cycloide ſumpto, velut B, deſcendat mobile impetu naturali per arcum B A, ſive per ſuperficiem ita inflexam. Dico tempus deſcenſus hujus eſſe ad tempus caſus per axem D A, ſicut ſemicircumferentia circuli ad diametrum. Quo demonſtrato, etiam tempora deſcenſus, per quoſlibet cycloidis arcus ad A terminatos, inter ſe æqualia eſſe conſtabit.

Deſcribatur ſuper axe D A ſemicirculus, cujus circumferentiam ſecet recta B F, baſi D C parallela, in E; junctâque E A, ducatur ei parallela B G, quæ quidem cycloidem tanget in B. Eadem vero occurrat rectæ horizontali per A ductæ in G: ſitque etiam ſuper F A deſcriptus ſemicirculus F H A.

Eſt igitur, per præcedentem, tempus deſcenſus per arcum cycloidis B A, ad tempus motus æquabilis per rectam B G cum celeritate dimidia ex B G, ſicut arcus ſemicirculi F H A ad rectam F A. Tempus vero dicti motus æquabilis per B G, æquatur tempori deſcenſus naturaliter accelerati per eandem B G, ſive per E A, quæ ipſi parallela eſt & æqualis, hoc eſt, tempori deſcenſus accelerati per axem D A*. Itaque tempus per arcum B A, erit quoque ad tempus deſcenſus per axem D A, ut ſemicirculi circumferentia F H A ad diametrum F A. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 6. Galil. de motu Accel.

De motu in Cycloide.

Quod si tota cycloidis cavitas perfecta ponatur, constat mobile, postquam per arcum B A descenderit, inde continuato motu per alterum ipsi æqualem arcum ascensurum *, atque in eo tantundem temporis atque descendendo consumpturum *. Deinde

* Prop. 9. huj.
* Prop. 11. huj.

rursus per A ad B perventurum, ac singularum ejusmodi reciprocationum, in magnis parvisve cycloidis arcubus peractarum, tempora fore ad tempus casus perpendicularis per axem D A, sicut circumferentia circuli tota ad diametrum suam.

PROPOSITIO XXVI.

Isdem positis, si ducatur insuper recta horizontalis H I *qua arcum* B A *secet in* I, *circumferentiam vero* F H A *in* H: *dico tempus per arcum* B I, *ad tempus per arcum* I A *post* B I, *eam rationem habere quam arcus circumferentiæ* F H *ad* H A.

Occurrat enim recta H I tangenti B G in K, axi D A in L. Est itaque tempus per arcum B A, ad tempus motus æquabilis per B G cum celeritate dimidia ex B G, sicut arcus F H A ad rectam F A *. Tempus autem dicti motus æquabilis per B G, est ad tempus motus æquabilis per B K, cum eadem celeritate dimidia ex B G, sicut B G ad B K longitudine, hoc est, sicut F A ad F L. Et rursus tempus motus æquabilis, cum dicta celeritate, per B K, ad tempus per arcum B I, sicut F L ad arcum F H *. Igitur ex æquo erit tempus per arcum B A ad tempus per B I, ut arcus F H A ad F H. Et dividendo, & convertendo, tempus per B I, ad tempus per I A post B I, ut arcus F H ad H A. quod erat demonstrandum.

*Prop. 24 huj.
*Prop. 24. huj.

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS TERTIA.

De linearum curvarum evolutione & dimensione.

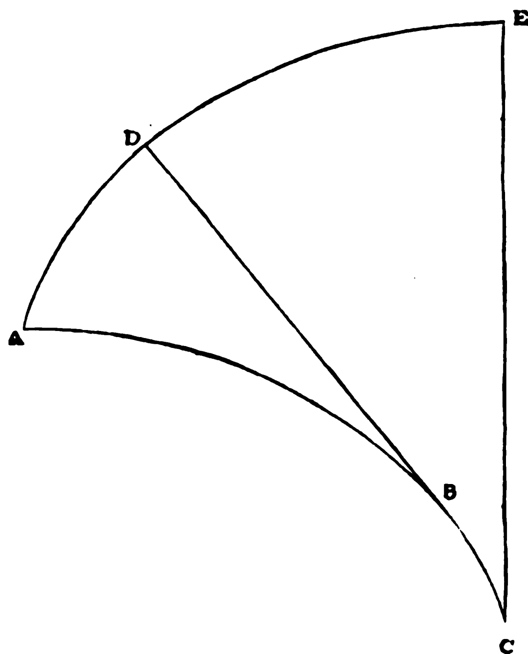
DEFINITIONES.

I.

LINEA in unam partem inflexa vocetur quam rectæ omnes tangentes ab eadem parte contingunt. Si autem portiones quasdam rectas lineas habuerit, hæ ipsæ productæ pro tangentibus habentur.

II.

Cum autem duæ hujusmodi lineæ ab eodem puncto egrediuntur, quarum convexitas unius obversa sit ad cavitatem alterius, quales sunt in figura adscripta curvæ A B C, A D E, *ambæ in eandem partem cavæ dicantur.*



III.

Si lineæ, in unam partem cavæ, filum seu linea flexilis circumplicata intelligatur, & manente una fili extremitate illi

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

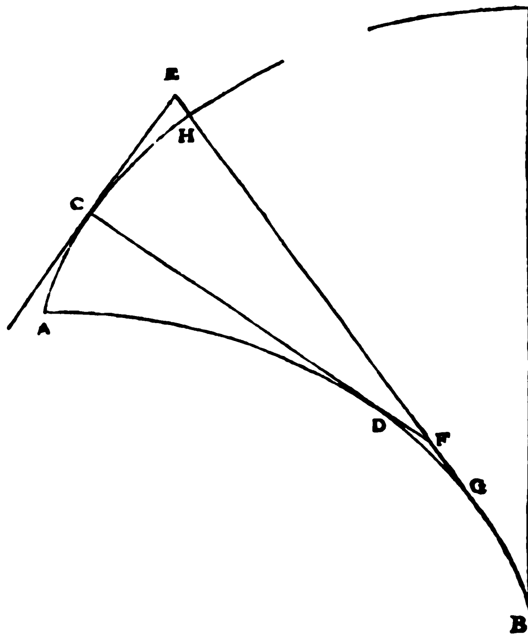
affixa, altera extremitas abducatur, ita ut pars ea quæ soluta est semper extensa maneat; manifestum est curvam quandam aliam hac fili extremitate describi. Vocetur autem ea, Descripta ex evolutione.

IV.

Illa vero cui filum circumplicatum erat, dicatur Evoluta. In figura superiori, A B C *est evoluta,* A D E *descripta ex evolutione* A B C, *ut nempe cum extremitas fili ex* A *venit in* D, *pars fili extensa sit* D B *recta, reliqua parte* B C *adhuc applicata curvæ* A B C. *Manifestum est autem* D B *tangere evolutam in* B.

PROPOSITIO I.

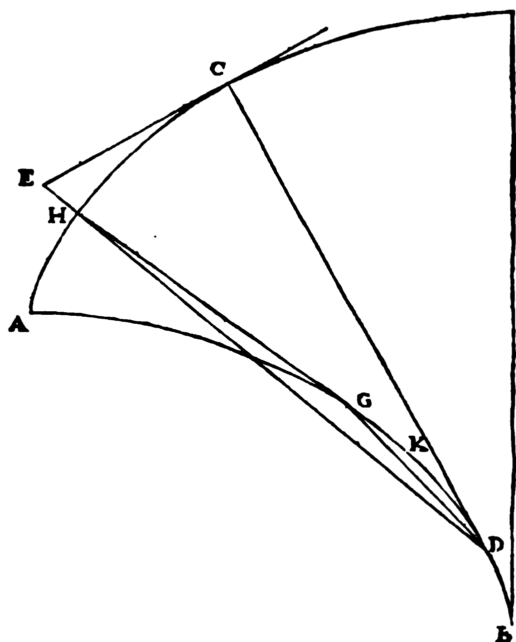
Recta omnis, quæ evolutam tangit, occurret lineæ ex evolutione descriptæ ad angulos rectos.



Sit A B evoluta, A H vero quæ ex evolutione illius descripta est. Recta autem F D C, tangens curvam A D in D, occurrat in C curvæ A C H. Dico ei occurrere ad angulos rectos: hoc est, si ducatur C E recta perpendicularis C D, dico eam in C tangere curvam A C H. Quia enim D C tangit evolutam in D, apparet ipsam referre positionem fili tunc cum ejus extremitas pervenit in C. Quod si igitur ostenderimus filum, in tota reliqua descriptione curvæ A C H, nusquam pertingere ad rectam C E præterquam in C puncto, ma-

nifestum erit rectam C E ibidem curvam A C H contingere. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Sumatur punctum aliquod in A C præter C, quod sit H, sitque primo remotius à principio evolutionis A quam punctum C, & intelligatur pars libera esse H G, cum extremitate sua ad H pervenit. Tangit ergo H G lineam A B in G. Cumque interea dum describitur pars curvæ C H, evolutus sit arcus D G, occurret C D à parte D producta ipsi H G, ut in F. Ponatur autem G H occurrere rectæ C E in E. Quia igitur duæ simul D F, F G, majores sunt quam D G, sive curva ea fuerit sive recta: fiet addendo utrinque rectam D C, ut rectæ C F, F G simul majores sint recta C D & ipsa D G. Sed propter evolutionem, apparet utrisque simul, rectæ C D, & lineæ D G, æquari rectam H G. Ergo duæ simul C F, F G majores quoque erunt recta H G; & ablata communi F G, erit C F major quam H F. Sed F E major est quam F C, quia angulus C trianguli F C E est rectus. Ergo F E omnino major quam F H. Vnde apparet, ab hac quidem parte puncti C, fili extremitatem non pertingere ad rectam C E.



Sit jam punctum H propinquius principio evolutionis A quam punctum C. sitque fili positio H G, tunc cum ejus extremitas esset in H, & ducantur rectæ D G, D H, quarum hæc occurrat rectæ C E in E. apparet autem D G rectam non posse esse in directum ipsi H G, adeoque H G D fore triangulum. Iam quia recta D G vel minor est quam D K G, vel eadem, si nempe evolutæ pars D G recta sit; addita utrique G H, erunt rectæ D G, G H simul minores vel

æquales duabus istis, scilicet D K G & G H, sive his æquali rectæ D C. Duabus autem rectis D G, G H minor est recta D H. Ergo hæc minor utique erit rectâ D C. Sed D E major est quam D C, quia in triangulo D C E angulus C est rectus. Ergo D H multo minor quam D E. Situm est ergo punctum H, hoc est extremitas fili G H, intra angulum D C E. Vnde apparet neque inter A & C usquam illam pertingere ad rectam C E. Ergo C E tangit curvam A C in C; ac proinde D C, cui C E ducta est perpendicularis, occurrit curvæ ad angulos rectos. quod erat demonstrandum.

Hinc etiam manifestum est curvam A H C in partem unam inflexam esse, & in eandem partem cavam ac ipsa A G B, cujus evolutione descripta est. Omnes enim tangentes lineæ A H C, cadunt extra spatium D G A H C: omnes vero tangentes lineæ A G D, intra dictum spatium. unde liquet cavitatem A H C respicere convexitatem A G D.

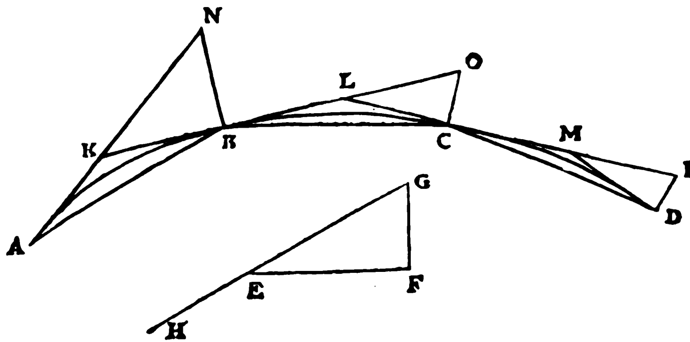
PROPOSITIO II.

Omnis curva linea terminata, in unam partem cava, ut A B D, *potest in tot partes dividi, ut si singulis partibus subtensæ rectæ ducantur, velut* A B, B C, C D; *& à singulis item divisionis punctis, ipsaque curvæ extremitate rectæ ducantur curvam tangentes, ut* A N, B O, C P, *quæ occurrant iis quæ in proxime sequentibus divisionis punctis curvæ ad angulos rectos insistunt, quales sunt lineæ* B N, C O, D P; *ut inquam subtensa quæque habeat ad sibi adjacentem curvæ perpendicularem, velut* A B *ad* B N, B C *ad* C O, C D *ad* D P, *rationem majorem quavis ratione proposita.*

Sit enim data ratio lineæ E F ad F G, quæ recto angulo ad F jungantur, & ducatur recta G E H.

Intelligatur primo curva A B D in partes tam exiguas secta punctis B, C, ut tangentes quæ ad bina quæque inter se proxima puncta curvam contingunt, occurrant sibi mutuo secundum angulos qui singuli majores sint angulo F E H; quales sunt anguli A K B, B L C, C M D. quod quidem fieri posse evidentius est quam ut demonstratione indigeat. Ductis jam subtensis A B, B C, C D, & erectis curvæ perpendicularibus B N, C O, D P, quæ occurrant productis A K, B L, C M, in N, O, P: dico rationes singulas rectarum, A B ad B N, B C ad C O, C D ad D P, majores esse ratione E F ad F G.

Quia enim angulus A K B major est angulo H E F, erit residuus illius ad duos rectos, nimirum angulus N K B, minor angulo G E F. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

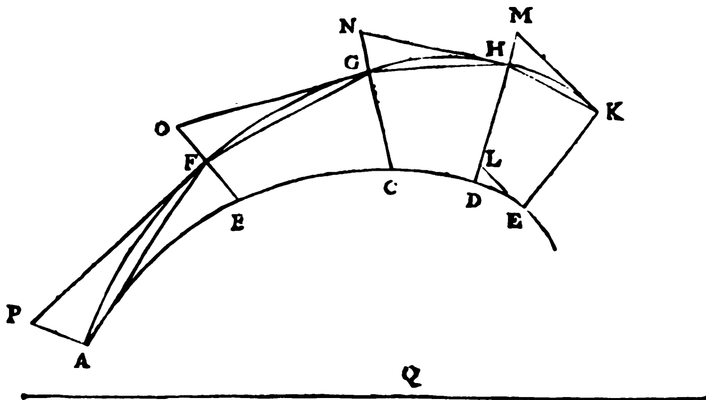


Angulus autem B trianguli K B N est rectus, sicut & angulus F in triangulo E F G. Ergo major erit ratio K B ad B N quam E F ad F G. Sed A B major est quam K B, quoniam angulus K in triangulo A K B est obtusus, est enim major angulo H E F qui est obtusus ex constructione. Ergo ratio A B ad B N major erit ratione K B ad B N, ac proinde omnino major ratione E F ad F G. Eodem modo & ratio B C ad C O, & C D ad D P, major ostendetur ratione E F ad F G. Itaque constat propositum.

PROPOSITIO III.

Duæ curvæ in unam partem inflexæ & in easdem partes cavæ ex eodem puncto egredi nequeunt, ita ad se invicem comparatæ, ut recta omnis quæ alteri earum ad angulos rectos occurrit, similiter occurrat & reliquæ.

Sint enim, si fieri potest, hujusmodi lineæ curvæ A C E, A G K, communem terminum habentes A, & sumpto in exteriore illarum



puncto quolibet K, sit inde educta K E recta, curvæ A G K occurrens ad angulos rectos, ac proinde etiam curvæ A C E.

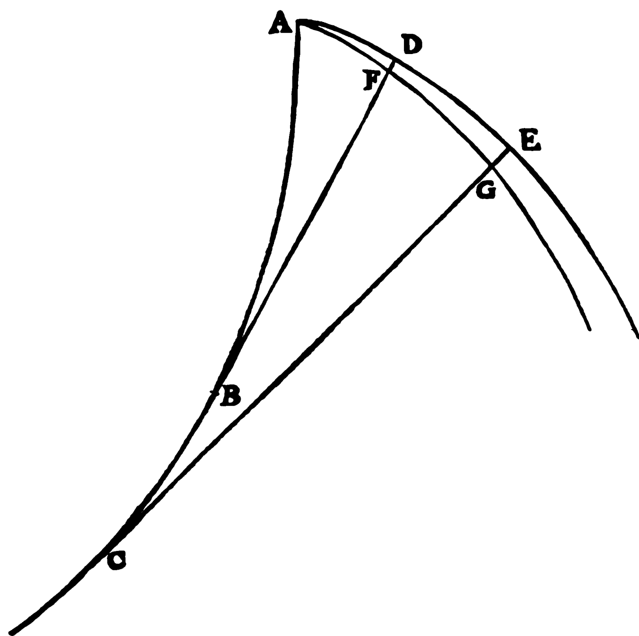
Poteſt jam recta quædam ſumi major curva K G A, quæ ſit Q. Diviſa autem intelligatur ipſa K G A, ut in propoſitione antecedenti dictum fuit, in tot partes punctis H G F, ut ſubtenſæ ſingulæ K H, H G, G F, F A, ad perpendiculares curvæ ſibi contiguas H M, G N, F O, A P majorem rationem habeant quam linea Q ad rectam K E. Itaque & omnes ſimul dictæ ſubtenſæ ad omnes dictas perpendiculares majorem habebunt rationem quam Q ad K E. Producantur autem perpendiculares eædem & occurrant curvæ A C E in D, C, B, nimirum ad angulos rectos ex hypotheſi. Erit jam K E minor quam M D. Etenim, ducta E L ipſi K E perpendiculari, quoniam K E occurrit lineæ curvæ E C A ad angulos rectos, tanget E L curvam A C E, occurretque neceſſario rectæ M D inter D & M. Vnde cum K E ſit breviſſima omnium quæ cadunt inter parallelas E L, K M, erit ea minor quam M L, ac proinde minor quoque omnino quam M D. Eodem modo & H D minor oſtendetur quam N C, & G C minor quam O B, & F B minor quam P A. Cum ſit ergo P A major quam F B, erunt duæ ſimul P A, O F majores quam O B. Item quum O B ſit major quam G C, erunt duæ ſimul O B, N G, majores quam N C. Sed duæ P A, O F majores erant quam O B. Itaque tres ſimul P A, O F, N G omnino majores erunt quam N C. Rurſus, quia N C major quam H D, erunt duæ ſimul N C, M H majores quam M D. Vnde, ſi loco N C ſumantur tres hæ ipſa majores P A, O F, N G, erunt omnino hæ quatuor P A, O F, N G, M H majores quam M D: ac proinde eædem quoque omnino majores recta K E, quia ipſa M D major erat quam K E. Diximus autem ſubtenſas omnes A F, F G, G H, H K majorem rationem habere ad omnes perpendiculares P A, O F, N G, M H, quam linea Q ad K E. Ergo cum dictis perpendicularibus minor etiam ſit K E, habebunt dictæ ſubtenſæ ad K E omnino majorem rationem quam Q ad K E. Ergo ſubtenſæ ſimul ſumptæ majores erunt recta Q. Hæc autem ipsâ curvâ A G K major ſumpta fuit. Ergo ſubtenſæ A F, F G, G K, H K ſimul majores erunt curva A G K cujus partibus ſubtenduntur; quod eſt abſurdum, cum ſingulæ ſuis arcubus ſint minores. Non igitur poterunt eſſe duæ curvæ lineæ quæ quemadmodum dictum fuit ſeſe habeant. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV.

SI ab eodem puncto duæ lineæ exeant in partem unam inflexæ, & in eandem partem cavæ, ita vero mutuo comparatæ

parata ut rectæ omnes, quæ alteram earum contingunt, alteri occurrant ad angulos rectos; posterior hæc prioris evolutione, à puncto communi cœpta, describetur. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Sunto lineæ A B C, A D E, in partem unam inflexæ, & quarum utraque in easdem partes cava existat, habeantque communem terminum A punctum. Omnes autem rectæ tangentes lineam A B C, velut B D, C E, occurrant lineæ A D E ad angulos rectos. Dico evolutione ipsius A B C, à termino A incepta, describi A D E.



Si enim fieri potest, describatur dicta evolutione alia quædam curva A F G. Ergo lineæ rectæ quælibet, evolutam A B C tangentes, ut B D, C E, occurrent ipsi A F G ad angulos rectos *, puta in F & G. Sed eædem tangentes etiam ad rectos angulos occurrere ponuntur lineæ A D E. Sunt igitur lineæ curvæ A D F, A F G, eodem puncto A terminatæ, inque partem unam flexæ, & ambæ in eandem partem cavæ, quippe utraque in eandem atque ipsa A B C; nam de linea A D E constat ex hypothesi, de A F G vero ex propositione prima hujus; & omnes quæ uni earum occurrunt ad angulos rectos, etiam alteri similiter occurrunt. quod quidem fieri non posse antea ostensum est *. Quare constat ipsam A D E descriptum iri evolutione lineæ A B C. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj.

* Prop. 3. huj.

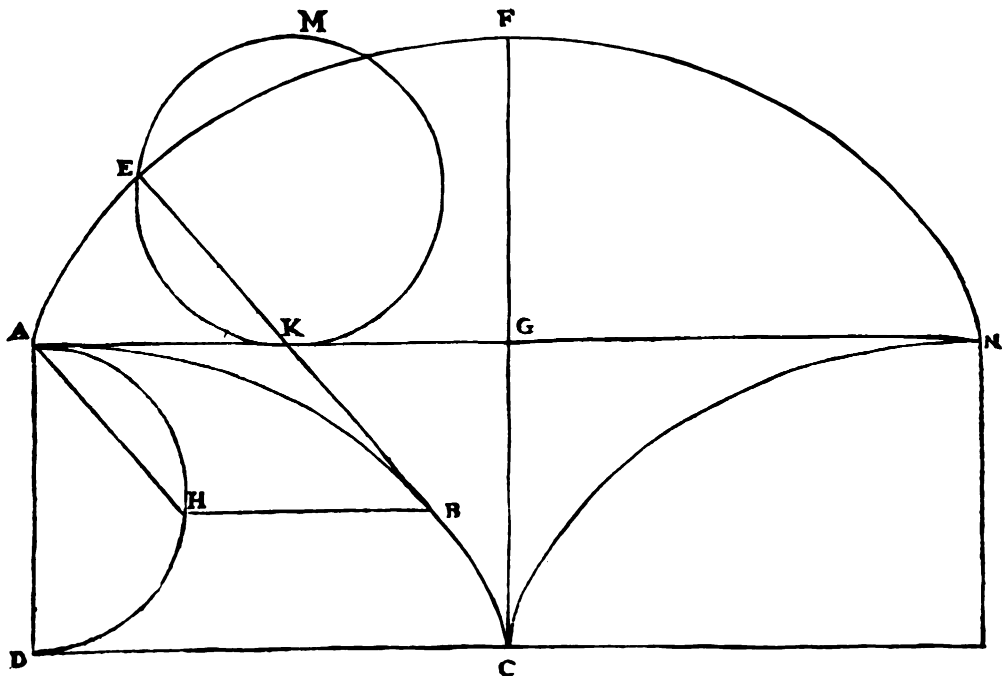


DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

PROPOSITIO V.

SI Cycloidem recta linea in vertice contingat, super qua, tanquam basi, alia cyclois priori similis & æqualis constituatur, initium sumens à puncto dicti verticis; recta qualibet inferiorem cycloidem tangens, occurret superioris portioni, sibi superposita, ad angulos rectos.

Tangat cycloidem A B C in vertice A recta A G, super qua, tanquam basi, similis alia cyclois constituta sit A E F, cujus vertex F. Cycloidem autem A B C tangat recta B K in B. Dico eam productam occurrere cycloidi A E F ad angulos rectos.



Describatur enim circa A D, axem cycloidis A B C, circulus genitor A H D, cui occurrat B H, basi parallela, in H, & jungatur H A. Quia ergo B K tangit cycloidem in B, constat eam parallelam esse rectæ H A *. Itaque A H B K parallelogrammum est, ac proinde A K æqualis H B, hoc est, arcui A H *. Sit porro jam descriptus circulus K M, genitori circulo, hoc est ipsi A H D, æqualis, qui tangat basin A G in K, rectam vero B K productam secet in puncto E. Quia ergo ipsi A H parallela est B K E, ac proinde angulus E K A æqualis K A H, manifestum est B K productam abscindere à circulo K M arcum æqualem ei quem à circulo A H D abscindit recta A H. Itaque arcus K E æqualis est arcui A H, hoc est rectæ H B, hoc est rectæ K A. Hinc

* Propos. 15. partis 2.
* Propos. 14. partis 2.

vero sequitur, ex cycloidis proprietate, cum circulus genitor M K tangebat regulam in K, punctum describens fuisse in E. Itaque recta K E occurrit cycloidi in E ad angulos rectos*. Est autem K E ipsa B K producta. Ergo patet productam B K occurrere cycloidi ad angulos rectos. quod erat demonstrandum.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

* Propos. 15. partis 2.

PROPOSITIO VI.

Semicycloidis evolutione, à vertice cœpta, alia semicyclois describitur evoluta æqualis & similis, cujus basis est in ea recta quæ cycloidem evolutam in vertice contingit.

Sit semicyclois A B C, cui superimposita sit alia similis A E F, quemadmodum in propositione præcedenti. Dico, si linea flexilis, circa semicycloidem A B C applicata, evolvatur, incipiendo ab A, eam describere extremitate sua ipsam semicycloidem A E F. Quia enim ex puncto A egrediuntur semicycloides A B C, A E F, in unam partem inflexæ, & ambæ in eandem cavæ, ac præterea ita comparatæ, ut omnes tangentes semicycloidis A B C occurrant semicycloidi A E F ad angulos rectos, sequitur hanc evolutione illius, à termino A incepta, describi*. quod erat demonstrandum.

* Propos. 4. huj.

Et apparet, si dimidiam cycloidem, ipsi A B C gemellam, contrario situ ab altera parte lineæ C G disponamus, velut C N, ejus evolutione, vel etiam dum filum, jam extensum in C F, circa eam replicatur, alteram semicycloidem F N fili extremitate descriptum iri, quæ simul cum priore A E F integram constituat.

Atque ex his, & propositione 25 de descensu gravium, manifestum jam est quod supra in Constructione Horologii de æquabili penduli motu dictum fuit. Patet enim perpendiculum, inter laminas binas, secundum semicycloidem inflexas, suspensum agitatumque, motu suo cycloidis arcum describere, ac proinde æqualibus temporibus quaslibet ejus reciprocationes absolvi. Non refert enim utrum in superficie, secundum cycloidem curvata, mobile feratur, an filo alligatum lineam ipsam in aëre percurrat, cum utrobique eandem libertatem, eandemque in omnibus curvæ punctis inclinationem ad motum habeat.

PROPOSITIO VII.

Cyclois linea sui axis, sive diametri circuli genitoris, quadrupla est.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Repetita enim figura præcedenti: cum post totam semicycloidem A B C evolutam, filum occupet rectam C F, quæ dupla est A D, propterea quod axes cycloidum A B C, A E F sunt æquales; apparet semicycloidem ipsam A B C, filo sibi circum applicito æqualem, duplam esse sui axis A D, ac totam proinde cycloidem axis sui quadruplam.

Apparet etiam tangentem B E, quæ refert partem fili extensam, antea curvæ parti B A applicatam, huic ipsi longitudine æquari. Est autem B E dupla ipsius B K, sive A H, quoniam in propositione quinta ostensum est K E ipsi A H æqualem esse. Itaque pars cycloidis A B rectæ A H, sive B K, dupla erit: existente nimirum B H parallela basi cycloidis: idque ubicumque in ea punctum B sumptum fuerit.

Hanc cycloidis dimensionem primus invenit, via tamen longe alia, eximius geometra Christophorus Wren Anglus, eamque deinde eleganti demonstratione confirmavit, quæ edita est in libro de cycloide viri clarissimi Ioannis Wallisij. De eadem vero linea, alia quoque multa extant pulcherrima inventa nostri temporis mathematicorum, quibus præcipuè occasionem præbuere problemata quædam à Blasio Paschalio Gallo proposita, qui in his studiis præcellebat. Is cum sua, tum aliorum inventa recensens, primum omnium Mersennum lineam hanc in rerum natura advertisse ait. Primum Robervallium tangentes ejus defini-

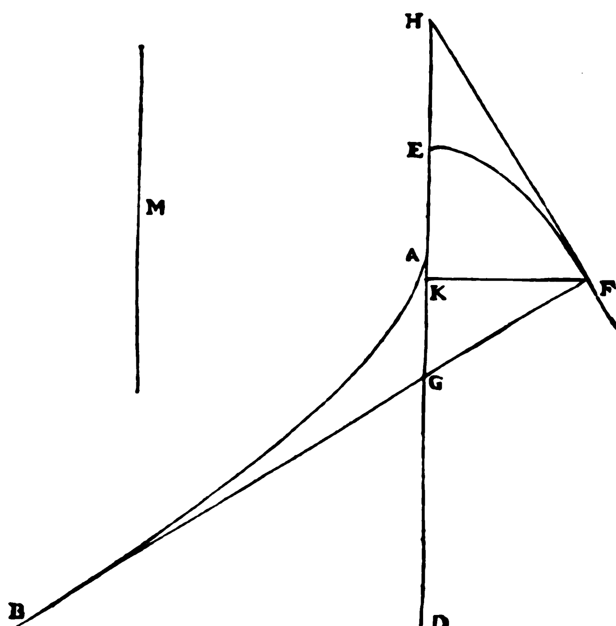
vifle, ac plana & folida dimenfum effe. Item centra gravitatis tum plani, tum partium ejus inveniffe. Primum Wrennium curvæ cycloidis æqualem rectam dediffe. Me quoque primum reperiffe dimenfionem abfolutam portionis cycloidis, quæ rectâ, bafi parallelâ, abfcinditur per punctum axis, quod quarta parte ejus à vertice abeft. quæ nimirum portio æquatur dimidio hexagono æquilatero, intra circulum genitorem defcripto. Seipfum denique folidorum ac femifolidorum, tam circa bafin quàm circa axem, centra gravitatis definiviffe, itemque partium eorum. Lineæ etiam ipfius (fed hæc poft acceptam à Wrennio dimenfionem) centrum gravitatis inveniffe, & dimenfionem fuperficierum convexarum, quibus folida ifta eorumque partes comprehenduntur; earumque fuperficierum centra gravitatis. Ac denique dimenfionem curvarum cujufvis cycloidis, tam protractæ quam contractæ: hoc eft earum quæ defcribuntur à puncto intra vel extra circumferentiam circuli genitoris fumpto. Et horum quidem demonftrationes à Pafchalio funt editæ. A quibus fuas quoque, de eadem linea, fubtiliffimas meditationes expofuit Cl. Wallifius, atque eadem illa omnia fuo marte fe reperiffe, ac problemata à Pafchalio propofita folviffe contendit. Quod idem & doctiffimus Lovera fibi vindicat Quantum vero unicuique debeatur, ex fcriptis eorum eruditi dijudicent. Nos propterea tantum præcedentia retulimus, quod filentio prætereunda non videbantur egregia adeo inventa, quibus factum eft ut, ex lineis omnibus, nulla nunc melius aut penitiùs quam cyclois cognita fit. Methodum vero noftram, qua in hac metienda ufi fumus, in aliis quoque experiri libuit, de quibus porro nunc agemus. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

PROPOSITIO VIII.

Cujus lineæ evolutione parabola defcribatur oftendere.

Sit paraboloides A B, cujus axis A D; vertex A; proprietas autem ifta, ut ordinatim ad axem applicata B D, cubus abfciffæ ad verticem D A æquetur folido, bafin habenti quadratum D B, altitudinem vero æqualem lineæ cuidam datæ M; quæ quidem curva pridem geometris nota fuit; & pouatur axi D E juncta in directum A E, quæ habeat $\frac{8}{27}$ ipfius M. Iam fi filum continuum circa E A B applicetur, idque ab E evolvi incipiat, dico defcri-

ptam ex evolutione esse parabolam E F, cujus axis E A C, vertex E, latus rectum æquale duplæ E A.



Sumpto enim in curva A B puncto quolibet B, ducatur quæ in ipso tangat curvam recta B G, occurrens axi E A in G. & ex G ducatur porro G F, quæ ad rectos angulos occurrat parabolæ E F in F; & sit ipsi G F perpendicularis F H, quæ parabolam in F continget; & denique F K ordinatim ad axem E G applicetur.

Est igitur K G æqualis dimidio lateri recto, hoc est, ipsi E A; ac proinde, additâ vel ablatâ utrimque A K, erit E K æqualis A G. Est autem A G triens ipsius A D, quoniam B G tangit paraboloidem in B: illud enim ex natura curvæ hujus facile demonstrari potest. Ergo & E K æqualis est trienti A D: & K H, quæ ex natura parabolæ dupla est K E, æquabitur duabus tertiis A D. Itaque cubus ex K H æqualis est $\frac{8}{27}$ cubi ex A D, hoc est, solido basin habenti quadratum D B, altitudinem vero æqualem $\frac{8}{27}$ M, hoc est, ipsi A E. Quamobrem ut quadratum D B ad quadratum K H, ita erit K H longitudine ad A E, hoc est ad K G. Erat autem K H æqualis $\frac{2}{3}$ A D, hoc est ipsi G D. Ergo ut quadratum B D ad quadratum D G ita est H K ad K G. Vt autem H K ad K G, ita est quadratum F K ad quadratum K G. Ergo sicut quadratum B D ad quadratum D G, ita quadratum F K ad quadratum K G. Et proinde sicut B D ad D G longitudine, ita F K ad K G. Vnde sequitur B G F esse lineam rectam. Sed G F occurrit parabolæ E F ad angulos rectos. Ergo apparet B G, tangentem paraboloidis, productam occurrere eidem parabolæ ad

angulos rectos. Idque similiter de quavis illius tangente demonstrabitur. Ergo constat ex evolutione lineæ E A B, à termino E inceptа, describi parabolam E F *. quod erat demonstrandum.

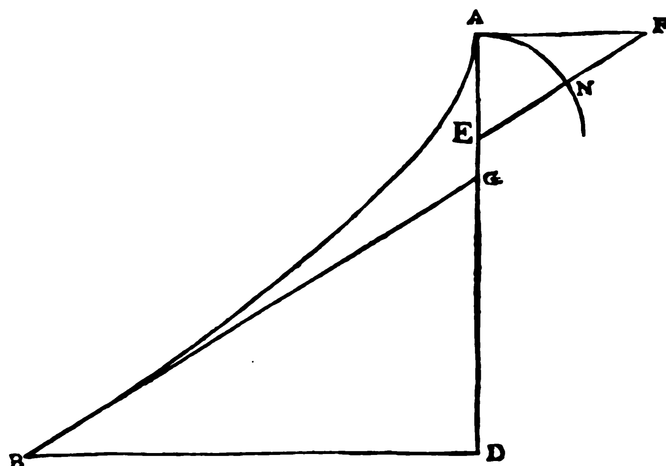
DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

* Prop. 4. huj.

PROPOSITIO IX.

Rectam lineam invenire æqualem datæ portioni curvæ paraboloidis, ejus nempe in qua quadrata ordinatim applicatarum ad axem, sunt inter se sicut cubi abscissarum ad verticem.

Quomodo hoc fiat ex prop. præcedenti manifestum est. Parabola vero E F ad constructionem non requiritur, quæ sic peragetur. Data quavis parte paraboloidis hujus A B, cui rectam æqualem invenire oporteat, ducatur B G tangens in puncto B, quæ occurrat axi A G in G. Tanget autem si A G fuerit tertia pars A D, inter



verticem & ordinatim applicatam B D interceptæ. Porro sumpta A E æquali $\frac{8}{27}$ lineæ M, quæ latus rectum est paraboloidis A B, ducatur E F parallela B G, occurratque lineæ A F, quæ parallela est B D, in F. Iam si ad rectam B G addatur N F, excessus rectæ E F supra E A, habebitur recta æqualis curvæ A B. Cujus demonstratio ex ante dictis facile perspicitur.

Semper ergo curva A B tantum superat tangentem B G, quantum recta E F rectam E A.

Rursus autem hic in lineam incidimus, cujus longitudinem alii jam ante dimensi sunt. Illam nempe quam anno 1659 Ioh. Heuratius Harlemensis rectæ æqualem ostendit, cujus demonstratio post commentarios Ioh. Schotenii in Cartesii Geometriam, eodem anno editam, adjecta est. Et ille quidem omnium primus curvam lineam, ex earum numero quarum puncta quælibet geo-

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

metricè definiuntur, ad hanc mensuram reduxit, cum sub idem tempus Cycloidis longitudinem dedisset Wrennius, non minus ingenioso epicheremate.

Scio equidem, ab edito Heuratii invento, Doctissimum Wallisium Wilhelmo Nelio, nobili apud suos juveni, idem attribuere voluisse, in libro de Cissoide. Sed mihi, quæ illic adfert perpendenti, videtur non multum quidem ab invento illo Nelium abfuisse, neque tamen plane id adsecutum esse. Nam neque ex demonstratione ejus, quam Wallisius affert, apparet illum satis perspexisse quænam foret curva illa, cujus, si construeretur, mensuram datam fore videbat. Et credibile est, si scivisset ex earum numero esse quæ jampridem Geometris cognitæ fuerant, vel ipsum, vel alios ejus nomine, tam nobile inventum Geometris maturius impertituros fuisse, quod, si quod aliud, merebatur ut Archimedeum illud εὕρηκα exclamarent. Sane ejusdem inventi, tanquam à se profecti, etiam Fermatius, Tholosanus senator ac Geometra peritissimus, demonstrationes conscripsit, quæ anno 1660 excusæ sunt; sed illæ sero utique.

Cum vero in his simus, etiam de nobis dicere liceat, quid ad promovendum tam eximium inventum contulerimus: siquidem & Heuratio ut eo perveniret occasionem præbuimus, & dimensionem curvæ parabolicæ ex hyperbolæ data quadratura, quæ Heuratiani inventi pars est, ante ipsum atque omnium primi reperimus. Etenim sub finem anni 1657 in hæc duo simul incidimus, curvæ parabolicæ quam dixi dimensionem, & superficiei conoidis parabolici in circulum reductionem. Cumque Schotenio, aliisque item amicorum, per literas indicassemus, duo quædam non vulgaria circa parabolam inventa nobis sese obtulisse, eorumque alterum esse conoidicæ superficiei extensionem in circulum, ille litteras eas cum Heuratio, quo tum familiariter utebatur, communicavit. Huic vero, acutissimi ingenii viro, non difficile fuit intelligere, conoidis istius superficiei affinem esse dimensionem ipsius curvæ parabolicæ. Qua utraque inventa, ulterius inde investigans, in alias istas curvas paraboloides incidit, quibus rectæ æquales absolute inveniuntur.

Ac de Conoidis quidem superficie in planum redacta, ne quis forte testimonium desideret, pauca hæc adscribere visum est ex literis viri clarissimi, atque inter præcipuos hodie Geometras censendi, Franc. Slusii, quibus eo ipso anno mihi inventum illud, ac prolixius forte quam pro merito, gratulatus est. In quibus literis

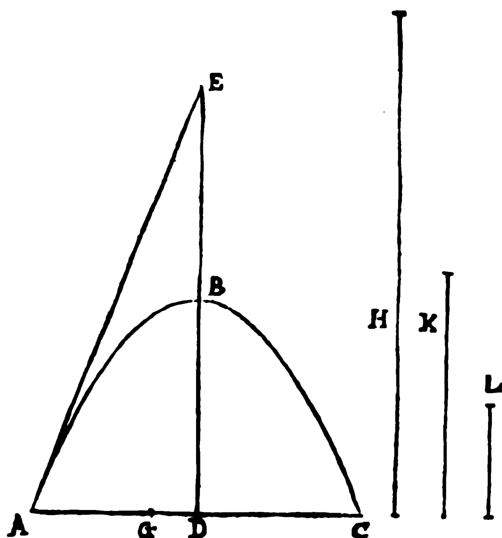
24.

24. Decemb. anni 1657. datis, ista habentur. *Duo tantum addo, unum &c. Alterum est, me has omnes curvas, ipsumque adeo locum linearem integrum, nihili pene facere præ invento hoc tuo, quo superficiei in conoide parabolico rationem ad circulum suæ baseos demonstrasti. Hanc pro circuli quadratura pulcherrimam ἀπαγωγὴν præfero libens iis omnibus, quas ex loco lineari nec paucas olim deduxi, & quas tecum, si ita jusseris, data occasione communicabo.* DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Anno autem insequenti etiam superficies conoidum hyperbolicorum & sphæroidum reperi, quomodo ad circulos reduci possent, constructionesque eorum problematum, non addita tamen demonstratione, Geometris quibuscum tunc litterarum commercium habebam, in Gallia Paschalio aliisque, in Anglia Wallisio impertii, qui non multo post sua quoque super his, una cum aliis multis subtilibus inventis in lucem edidit, fecitque ut nostris demonstrationibus perficiendis supersederem. Quoniam vero non inelegantes visæ sunt constructiones nostræ, neque adhuc publice extant, placet hoc loco illas adscribere.

Conoidis parabolici superficiei curvæ circulum æqualem invenire.

Sit datum conoides cujus sectio per axem parabola A B C; axis ejus B D, vertex B, diameter basis A C, qui sit axi B D ad an-



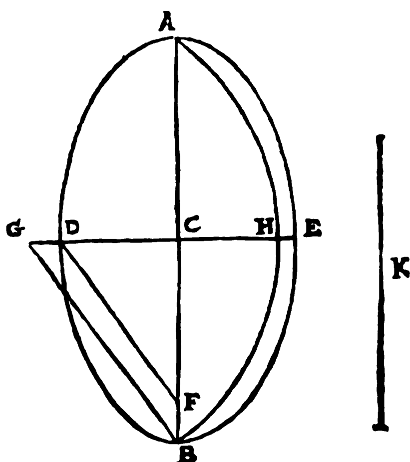
gulos rectos. Et oporteat superficiei portionis curvæ invenire circulum æqualem.

Producto axe à parte verticis, ſumatur B E æqualis B D, & jungatur E A, quæ parabolam A B C in A continget. Porro ſecetur A D in G, ut ſit A G ad G D ſicut E A ad A D. Et utriſque ſimul A E, D G æqualis ſtatuatur recta H. Item trienti baſis A C æqualis ſit recta L, & inter H & L media proportionalis inveniatur K. qua tanquam radio circulus deſcribatur. Is æqualis erit ſuperficiei curvæ conoidis A B C. Hinc ſequitur, ſi fuerit A E dupla A D, ſuperficiem conoidis curvam ad circulum baſeos fore ut 14 ad 9. Si A E tripla A D, ut 13 ad 6. ſi A E quadrupla A D, ut 14 ad 5. Atque ita ſemper fore ut numerus ad numerum, ſi A E ad A D ejuſmodi rationem habuerit.

Sphæroidis oblongi ſuperficiei circulum æqualem invenire.

Esto ſphæroides oblongum cujus axis A B, centrum C, ſectio per axem ellipſis A D B E, cujus minor diameter D E.

Ponatur D F æqualis C B, ſeu ponatur F alter focorum ellipſeos A D B E, rectæque F D parallela ducatur B G, occurrens productæ



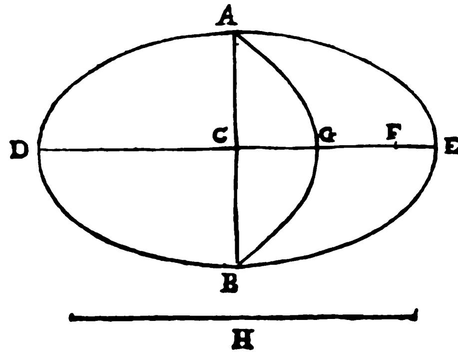
E D in G. centroque G, radio G B, deſcribatur ſuper axe A B arcus circumferentiæ B H A. Interque ſemidiametrum C D & rectam utriſque æqualem, arcui A H B & diametro D E, media proportionalis ſit recta K. Erit hæc radius circuli qui ſuperficiei ſphæroidis A D B E æqualis ſit.



Sphæroidis lati sive compressi superficiei circulum æqualem invenire.

SIt sphæroides latum cujus axis A B, centrum C, sectio per axem ellipsis A D B E.

Sit rursus focorum alteruter F, divisâque bifariam F C in G, intelligatur parabola A G B quæ basin habeat axem A B, verticem



vero punctum G. Sitque inter diametrum D E, & rectam curvæ parabolicæ A G B æqualem, media proportionalis linea H. Erit hæc radius circuli qui superficiei sphæroidis propositi æqualis sit.

Conoidis hyperbolici superficiei curvæ circulum æqualem invenire.

ESto conoides hyperbolicum cujus axis A B, sectio per axem hyperbola C A D, cujus latus transversum E A, centrum F, latus rectum A G.

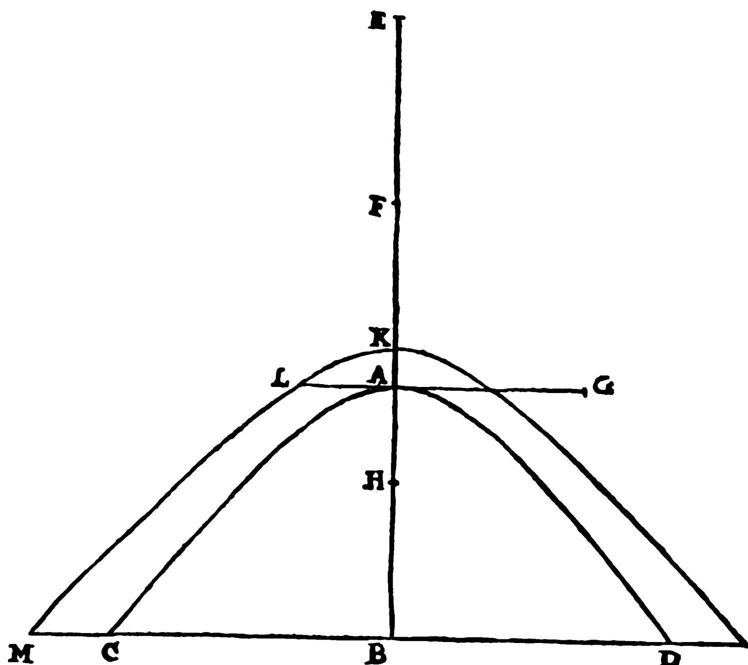
Sumatur in axe recta A H, æqualis dimidio lateri recto A G. & ut H F ad A F longitudine ita, sit A F ad F K potentiâ. Et intelligatur vertice K alia hyperbola descripta K L M, eodem axe & centro F cum priore, quæque latera rectum & tranversum illi reciproce proportionalia habeat. Occurrat autem ipsi producta B C in M, sitque A L parallela B C. Erit jam sicut spatium A L M B, tribus rectis lineis & curva hyperbolica comprehensum, ad dimidium quadratum ex B C, ita superficies conoidis curva ad circulum baseos suæ, cujus diameter C D. Vnde constructio reliqua facile absolvetur, positâ hyperbolæ quadraturâ

Quum igitur conoidis parabolici superficies ad circulum redigatur, æque ac superficies sphæræ, ex notis geometriæ regulis; in superficie sphæroidis oblongi, ut idem fiat, ponendum est arcus

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

circumferentiæ longitudinem æquari poſſe lineæ rectæ. Ad ſphæroidis vero lati, itemque ad conoidis hyperbolici ſuperficiem eadem ratione complanandam, hyperbolæ quadratura requiritur. Nam parabolicæ lineæ longitudo, quam in ſphæroide hoc adhibuimus, pendet à quadratura hyperbolæ, ut mox oſtendemus.

Verum, quod non indignum animadverſione videtur, invenimus abſque ulla hyperbolicæ quadraturæ ſuppoſitione, circulum æqualem conſtrui ſuperficiei utrique ſimul, ſphæroidis lati & conoidis hyperbolici.

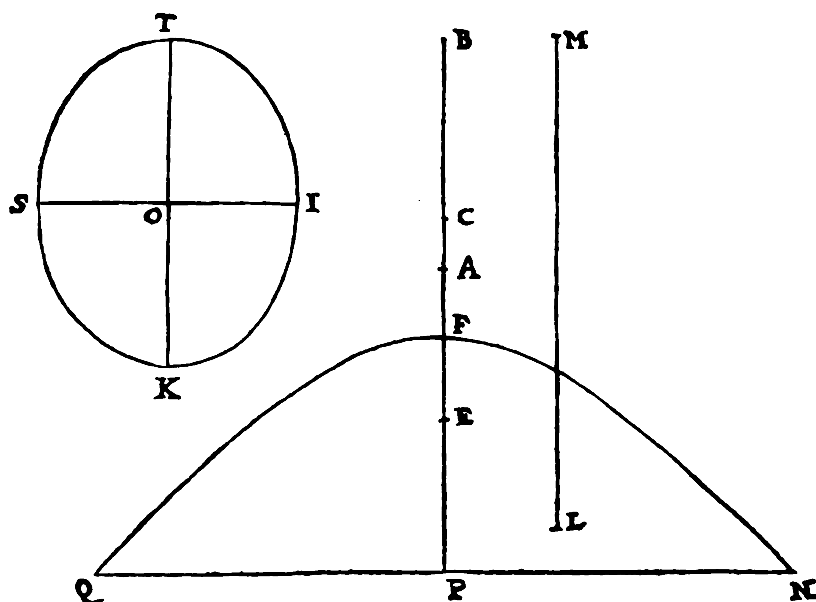


Dato enim ſphæroide quovis lato, poſſe inveniri conoides hyperbolicum, vel contra, dato conoide hyperbolico, poſſe inveniri ſphæroides latum ejuſmodi, ut utriuſque ſimul ſuperficiei exhibeatur circulus æqualis. cujus exemplum in caſu uno cæteris ſimpliciore ſufficiet attuliſſe.

Sit ſphæroides latum cujus axis S I, ſectio per axem ellipſis S T I K; cujus ellipſis centrum O, axis major T K. ponatur autem ellipſis hæc ejuſmodi, ut latus tranverſum T K habeat ad latus rectum eam rationem, quam linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecta, ad partem ſui majorem.

Sumatur B C potentia dupla ad S O, item B A potentia dupla ad O K. & ſint hæ quatuor continue proportionales B C, B A, B F,

B E, & ponatur E P æqualis E A. Intelligatur jam conoides hyperbolicum Q F N, cujus axis F P; axi adjecta, sive ½ latus transversum F B; dimidium latus rectum æquale B C. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.



Hujus conoidis superficies curva, unà cum superficie sphæroidis S I, æquabitur circulo cujus datus erit radius M L, qui nempe possit quadratum T K cum duplo quadrato S I.

Curvæ parabolicæ æqualem rectam lineam invenire.

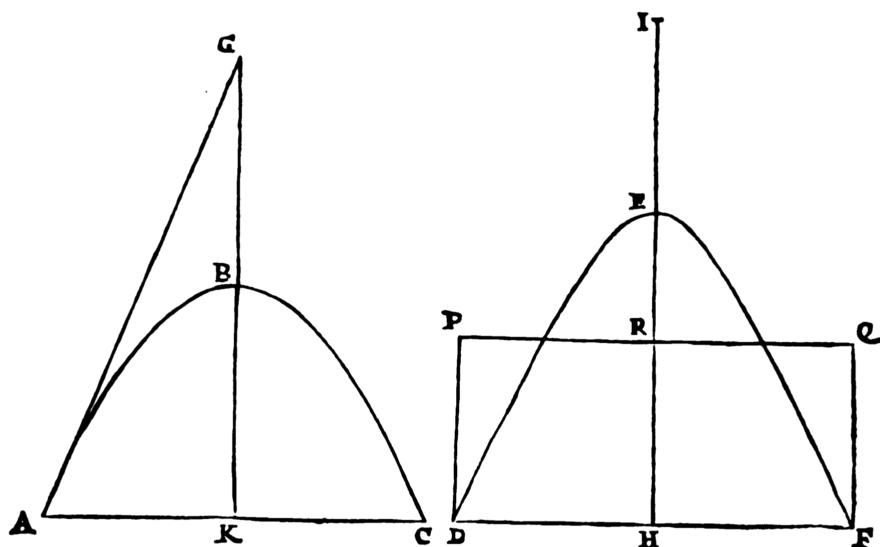
Sit parabolæ portio A B C, cujus axis B K, basis A C axi ad angulos rectos; & oporteat curvæ A B C rectam æqualem invenire.

Accipiatur basi dimidiæ A K æqualis recta I E, quæ producatur ad H, ut sit I H æqualis A G, quæ parabolam in puncto basis A contingens, cum axe producto convenit in G. Sit jam portio hyperbolæ D E F, vertice E, centro I descriptæ, cujusque diameter sit E H; basis vero D H F ordinatim ad diametrum applicata. Latus rectum pro lubitu sumi potest. Quod si jam super basi D F intelligatur parallelogrammum constitutum D P Q F, quod portioni D E F æquale sit; ejus latus P Q ita secabit diametrum hyperbolæ in R, ut R I sit æqualis curvæ parabolicæ A B, cujus dupla est A B C.

Apparet igitur hinc quomodo à quadratura hyperbolæ pendeat curvæ parabolicæ mensura, & illa ab hac vicissim.

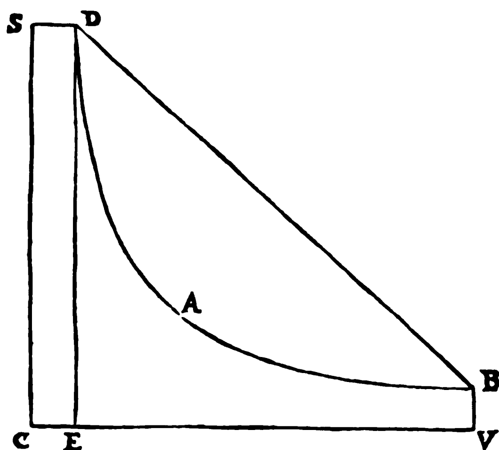
DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Quæcunque vero problemata ad alterum è duobus hisce reducuntur, quamlibet veræ proximam solutionem per numeros ac-



cipiunt, logarithmorum admirabili invento. Cum per hos hyperbolæ quadratura, ut olim invenimus, numeris quam proxime explicetur. Est autem regula hujusmodi.

Sit D A B portio hyperbolæ, cujus asymptoti C S, C V, ductis D E, B V parallelis asymptoto S C.



Accipiatur differentia logarithmorum qui conveniunt numeris, eandem inter se rationem habentibus quam rectæ D E, B V; ejusque differentiæ quæratur logarithmus. Cui addatur logarith-

mus hic (qui ſemper eſt idem) 0, 36221, 56887. Summa erit logarithmus numeri qui ſpatium D E V B A D deſignabit, tribus rectis & curva D A B comprehenſi, in partibus qualium parallelogrammum D C eſt 100000, 00000. Vnde porro facile quoque habebitur area portionis D A B.

Sit ex. gr. proportio D E ad B V ea quæ 36 ad 5.

Ab	1, 55630, 25008,	logar°. 36.
auferatur	0,69897, 00043.	logar^us. 5.
Erit	0, 85733, 14965.	differ. logar^orum.
Et	9, 93314, 92856.	logar^us. differentiæ.
Cui addatur	0, 36221, 56887.	logar^us. ſemper addendus.
Fit	10, 29536, 49743.	logar^us. ſpatii D E V B A D.

Habebit hujus logarithmi numerus 11 characteres, quum characteriſtica ſit 10. Quæratur itaque primo numerus proxime minor, conveniens invento logarithmo, qui numerus eſt 19740. Deinde ex differentia logarithmi ejuſdem, & proxime eum in tabula ſequentis, reliqui characteres eliciantur 81026, ſcribendi poſt priores, ut fiat 197408, 10260, addito ad finem zero, ut efficiatur numerus characterum 11. Eſt ergo area ſpatii D E V B A D proxime partium 197408, 10260, qualium partium parallelogrammum D C eſt 100000, 00000.

PROPOSITIO X.

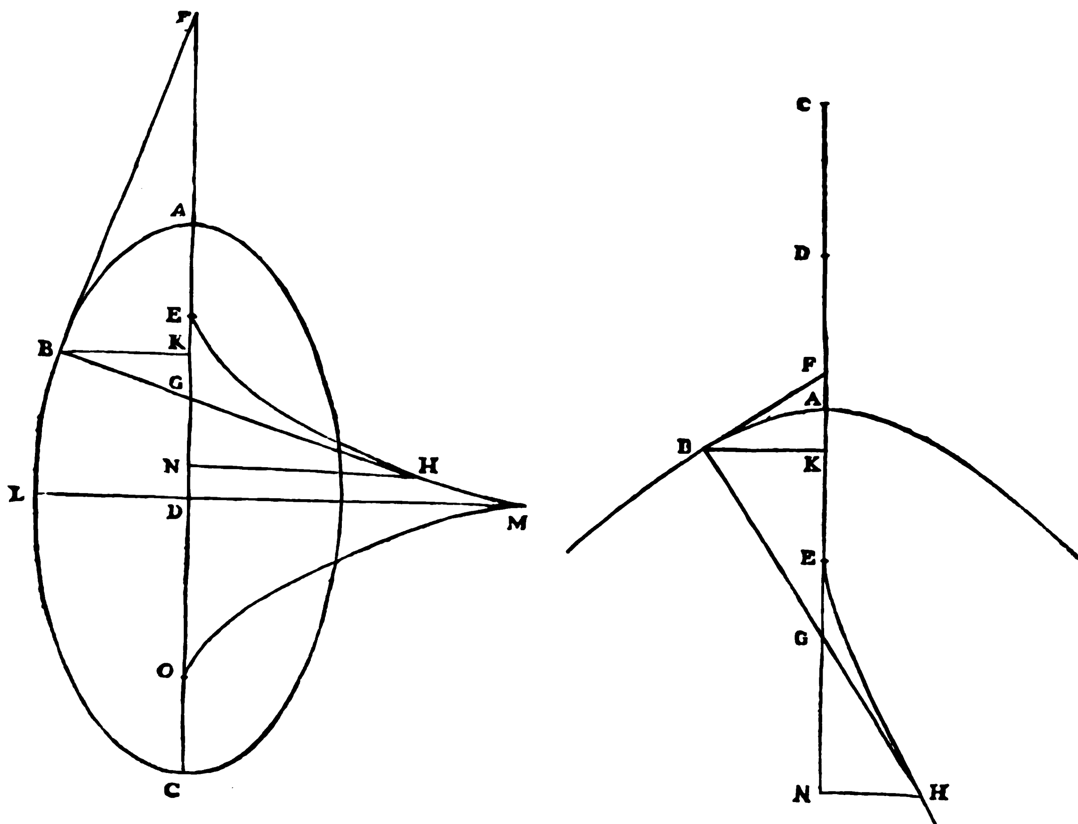
Lineas curvas exhibere quarum evolutione ellipſes & hyperbolæ deſcribantur, rectaſque invenire iiſdem curvis æquales.

Sit ellipſis vel hyperbole quælibet A B, cujus axis tranſverſus A C; centrum figuræ D; latus rectum duplum ipſius A E. Et ſumpto in ſectione quovis puncto, ut B, applicetur ordinatim ad axem recta B K, & ad dictum punctum B tangens ducatur quæ conveniat cum axe in F; ſitque B G ipſi F B perpendicularis, axique occurrat in G; & producatur B G uſque ad H, ut B H ad H G habeat rationem eam quæ componitur ex rationibus G F ad F K, & A D ad D E.

Dico curvam E H M, cujus puncta omnia inveniuntur eodem modo quo punctum H, eſſe eam cujus evolutione, unà cum recta E A, deſcribetur ſectio A B. Ipſam autem B H tangere curvam in

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

H, & esse toti H E A æqualem. Quamobrem, si ab H B auferatur E A, reliqua recta portioni curvæ H E æquabitur. Apparet autem, cum curvæ puncta quævis indifferenter, certaque ratione inveniantur, esse eam utrobique ex earum genere, quæ merè geometricæ censentur. Vnde & relatio horum omnium punctorum ad puncta axis A C, æquatione aliqua exprimi poterit, quam æquationem ad sextam dimensionem ascendere invenio; minimumque habere ter-



minorum, si fuerit A B hyperbola cujus latera transversum rectumque æqualia. Tunc enim ducta ex quovis curvæ puncto, ut H, ad axem C A N perpendiculari H N; vocatâque A C, a; C N, x; & N H, y; erit semper cubus ab xx-yy-aa æqualis 27 $xxyyaa$. Sed hoc casu brevius quoque multo, quam prædicta constructione, curvæ E H M puncta reperiri possunt, ut in sequentibus ostendetur.

Cæterum notandum est, in ellipsi singulos quadrantes singularum linearum evolutione describi; sicut quadrans A B L evolutione lineæ A E H M, quadrans C L evolutione similis huic oppositæ C O M. Est enim hæc in sectione utraque diversitas, quod cum principium quidem curvæ E H M, tam in ellipsi quam in hyperbola, sit punctum E, sumpta A E æquali ½ lateris recti; in hyperbola in infinitum inde dicta linea extenditur, at in ellipsi finitur in

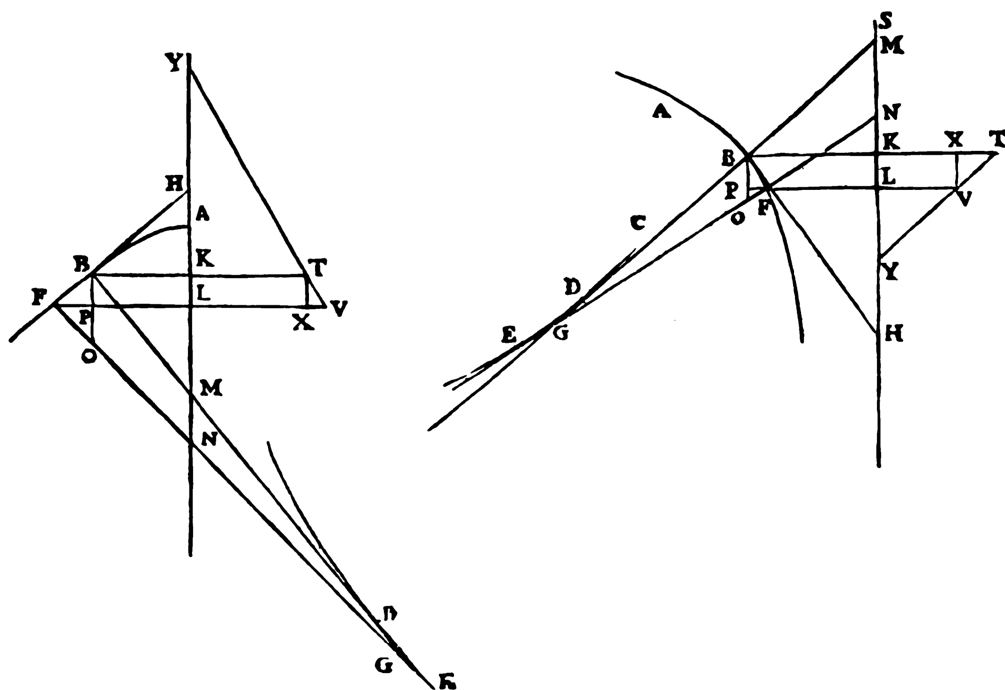
in puncto axis minoris M, sumpta L M æquali ½ lateris recti, secundum quod possunt ordinatim applicatæ ad dictum minorem axem. Namque hos terminos esse hujus curvæ, facile apparebit ortum ejus consideranti, quodque in ellipsi est sicut A D ad D E, ita L M ad M D. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Horum autem demonstrationi non immorabimur, sed ad ipsam methodum tradendam pergemus, qua & hæ curvæ ex sectionibus conicis, & aliæ innumeræ ex aliis quibuscunque datis inveniuntur.

PROPOSITIO XI.

Datâ lineâ curvâ, invenire aliam cujus evolutione illa describatur; & ostendere quod ex unaquaque curva geometrica, alia curva itidem geometrica existat, cui recta linea æqualis dari possit.

Sit curva quæpiam, vel pars ejus, in partem unam inflexa A B F, & recta K L, ad quam puncta omnia referantur; & oporteat invenire curvam aliam, ut D E, cujus evolutione ipsa A B F describatur.



Ponatur jam inventa; & quoniam tangentes omnes curvæ D E, necesse est occurrere lineæ A B F, ex evolutione descriptæ, ad angulos rectos; patet quoque vicissim eas quæ ipsi A B F ad rectos angulos insistunt, ut B D, F E, tacturas evolutam C D E.

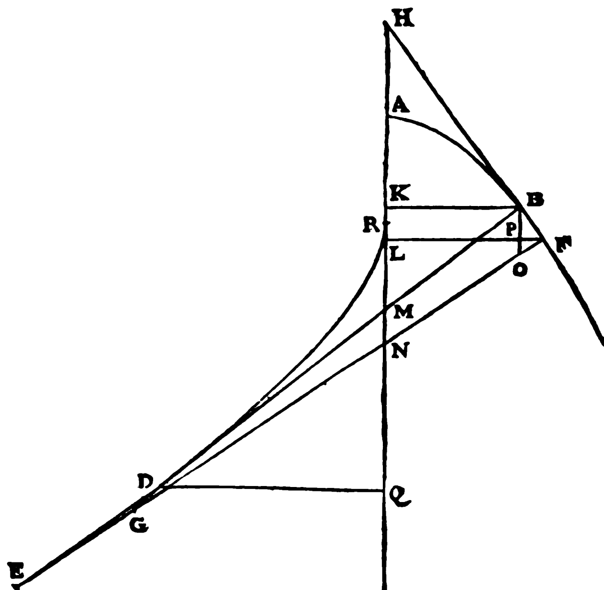
DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Intelligantur autem puncta B, F, inter se proxima; & si quidem à parte A evolutio incipere ponatur, ulteriusque inde distet F quam B, etiam contactus E ulterius quam D distabit ab A; intersectio vero rectarum B D, F E, quæ est G, cadet ultra punctum D in recta B D. Nam concurrere ipsas B D, F E necesse est, cum curvæ B F ad partem cavam insistant rectis angulis.

Quanto autem punctum F ipsi B propinquius fuerit, tanto propius quoque puncta D, G & E convenire apparet; ideoque, si interstitium B F infinite parvum intelligatur, tria dicta puncta pro uno eodemque erunt habenda; ac præterea, ductâ rectâ B H, quæ curvam in B tangat, eadem quoque pro tangente in F censebitur. Sit B O parallela K L, & in hanc perpendiculares cadant B K, F L: secetque F L rectam B O in P, & sint puncta notata M, N, in quibus rectæ, B D, F E, occurrant ipsi K L. Quia igitur ratio B G ad G M est eadem quæ B O ad M N, data hac dabitur & illa; & quia recta B M datur magnitudine ac positione, dabitur & punctum G in producta B M, sive D in curva C D E, quia G & D in unum convenire diximus. Datur autem ratio B O ad M N; simpliciter quidem in Cycloide, ubi primùm omnium illam investigavimus, invenimusque duplam; in aliis vero curvis, quas hactenus examinavimus, per duarum datarum rationum compositionem. Nam quia ratio B O ad M N componitur ex rationibus B O ad B P, sive N H ad L H, & ex B P sive K L ad M N; patet si rationes hæ utræque dentur, etiam ex iis compositam rationem B O ad M N datum iri. Illas vero dari in omnibus curvis geometricis, in sequentibus patebit; ac proinde iis semper curvas adsignari posse, quarum evolutione describantur, quæque ideo ad rectas lineas sint reducibiles.

Ponatur primò parabola esse A B F, cujus vertex A, axis A Q. Cum igitur lineæ B M, F N, sint parabolæ ad angulos rectos; ductæque sint ad axem A Q perpendiculares B K, F L, erunt, ex proprietate parabolæ, singulæ M K, N L dimidio lateri recto æquales; & ablata communi L M, æquales inter se K L, M N. Hinc, quum ratio B G ad G M componatur ex rationibus N H ad H L, & K L ad M N, uti dictum fuit, sitque earum posterior ratio æqualitatis; liquet rationem B G ad G M fore eandem quæ N H ad H L; & dividendo, B M ad M G, eandem quæ N L ad L H, sive M K ad K H; nam L H, K H pro eadem habentur, propter propinquitatem punctorum B, F. Data autem est ratio M K ad K H, dato puncto B; quoniam tam M K, quam K H dantur magnitudine; nam M K æquatur dimidio lateri recto, K H vero duplæ K A. Dataque etiam est positione & magni-

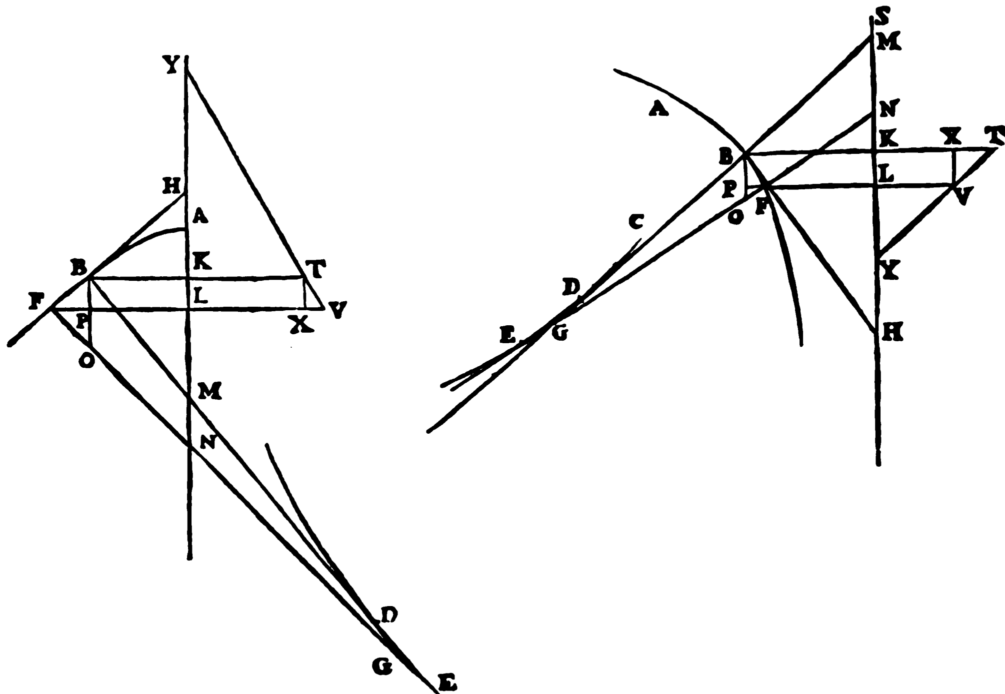
tudine recta B M. Ergo & M G data erit, adeoque & punctum G, sive D, in curva R D E; quod nempe invenitur producta B M usque in G, ut sit B M ad M G sicut $\frac{1}{2}$ lateris recti ad duplam K A. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.



Et sic quidem, adsumptis in parabola A B F aliis quotlibet punctis præter B, totidem quoque puncta lineæ R D E, simili ratione, invenientur; atque hoc ipso lineam R D E geometricam esse constat, unáque proprietas ejus innotescit, ex qua cæteræ deduci possunt. Vt si inquirere deinde velimus, quanam æquatione exprimatur relatio punctorum omnium curvæ G D E ad rectam A Q: ducta in hanc perpendiculari D Q, vocatoque latere recto parabolæ A B F, a; AK, b; A Q, x; Q D, y. Quoniam ratio B M ad M D, hoc est, K M ad M Q, est ea quæ $\frac{1}{2}a$ ad $2b$, estque ipsa K M ∞ $\frac{1}{2}a$, erit & M Q æqualis $2b$. Est autem M A ∞ $\frac{1}{2}a + b$. ergo A Q sive x æqualis $3b + \frac{1}{2}a$. Vnde $b \infty \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$. Porro quoniam, sicut quadratum M K, hoc est, $\frac{1}{4}aa$ ad quadratum K B, hoc est, ab, ita qu. M Q, hoc est, $4bb$ ad qu. Q D; erit qu. Q D, sive $yy \infty \frac{16b^3}{a}$. Vbi, si in locum b substituatur $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$, quod illi æquale inventum est, fiet $yy \infty$ 16 cub. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}a$ divisis per a. Ac proinde $\frac{27}{16}ayy \infty$ cubo ab $x - \frac{1}{2}a$. Accipiatur A R in axe parabolæ $\infty \frac{1}{2}a$; eritque R Q ∞ $x - \frac{1}{2}a$. Curvam igitur C D ejus naturæ esse liquet, ut semper cubus lineæ R Q æquetur parallelepipedo, cujus basis qu. Q D, altitudo $\frac{27}{16}a$; ac proinde ipsam paraboloidem esse, cujus evolutione describi parabolam A B supra ostendimus; cujus nimirum paraboloidis latus rectum æquetur $\frac{27}{16}$ lateris recti parabolæ A B. tunc enim hujus latus rectum æquale fit $\frac{16}{27}$ lateris recti paraboloidis, quemadmodum ibi fuit definitum.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Quomodo porro ratio O B ad B P, sive N H ad H L, non tantum cum A B F parabola est, sed etiam alia quælibet curva geometrica, semper inveniri possit manifestum est. Quoniam tantum recta F H ducenda est, quæ curvam in adsumpto puncto F tangat, & F N ipsi F H perpendicularis: unde N H & H L datæ erunt, ac proinde ratio quoque earum data.



At non æque liquet quo pacto ratio K L ad M N innotescat, quam tamen semper quoque reperiri posse sic ostendemus.

Sint rectæ K T, L V, perpendiculares super K L, sitque K T æqualis K M, & L V æqualis L N, & ducatur V X parallela L N, quæ occurrat ipsi K T in X. Quoniam ergo semper eadem est differentia duarum L K, N M, quæ duarum L N, K M, hoc est, quæ duarum L V, K T; est autem differentiæ ipsarum L V, K T æqualis X T, & X V ipsi L K; erit proinde N M æqualis duabus simul V X, X T, vel ei quo V X ipsam X T superat. Atque adeo, si data fuerit ratio V X ad X T, data quoque erit ratio V X ad utramque simul V X, X T, vel ad excessum V X supra X T, hoc est, data erit ratio V X sive L K ad N M.

Sciendum est autem, quoniam K T ipsi K M, & L V ipsi L N, æquales sumptæ sunt, locum punctorum T, V, fore lineam quandam vel rectam vel curvam datam, ut mox ostendetur. Et siquidem sit linea recta; ut contingit si A B F coni sectio fuerit, & K L axis ejus; constat rationem V X ad X T datam fore, data positione ipsius lineæ V T, quæ locus est punctorum V, T; semperque ean-

dem tunc haberi dictam rationem, qualecunque fuerit intervallum K L.

At si locus alia linea curva fuerit, diversa erit ratio V X ad X T, prout majus minusve fuerit intervallum K L. Inquirendum est autem quaenam futura sit ista ratio, cum K L infinite parvum imaginamur, quoniam & puncta B, F, proxima invicem posuimus. Similiter itaque & puncta V, T, lineae curvae minimam particulam intercipere intelligendum est; unde recta V T, cum ea quae in T curvam contingit, coincidet. Sit ergo tangens illa T Y; potest enim duci quoniam curva, ad quam sunt puncta T, V, geometrica est. Ratio igitur Y K ad K T data erit, adeoque & V X ad X T. ex qua etiam rationem L K ad N M dari ostendimus.

Quaenam vero sit linea ad quam sunt puncta T, V, invenitur ponendo certum punctum S in recta K L, & vocando S K, x; K T, y. Nam quia data est curva A B F, eique B M ad angulos rectos ducta, invenietur inde quantitas lineae K M, per methodum tangentium à Cartesio traditam, quae ipsi K T, sive y aequabitur, & ex ea aequatione, natura curvae T V innotescet, ad quam deinde tangens ducenda est. Sed clariora omnia fient sequenti exemplo.

Sit A B F paraboloides illa, cui superius rectam aequalem invenimus; in qua nempe cubi perpendicularium in rectam S K, sint inter se sicut quadrata ex ipsa S K abscissarum. Et oporteat invenire curvam C D E cujus evolutione paraboloides S B F describatur.

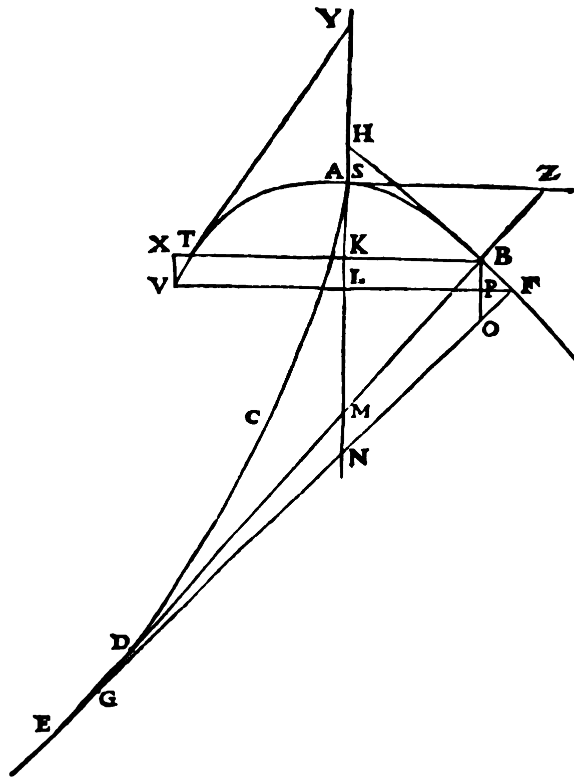
Hic primum ratio B O ad B P facile invenitur, quia tangentem paraboloidis in puncto B duci scimus, sumpta S H aequali $\frac{3}{2}$ S K. Cui tangenti cum B M ad angulos rectos insistat, dantur jam lineae M H, H K, ac proinde earum inter se ratio, quae est eadem quae O B ad B P.

Vt autem ratio B P, sive K L ad M N innotescat, ponantur ad K L perpendiculares rectae K T, L V, aequales singulis K M, L N, sitque V X parallela L K. Iam quia ex duabus simul K L, L N, auferendo K M, relinquitur M N; hoc est, auferendo ex duabus X V, V L, sive X V, X K, ipsam K T; hinc autem relinqui apparet V X & X T: erunt igitur hae duae V X, X T ipsi M N aequales, ac proinde ratio K L ad M N eadem quae V X ad duas simul V X, X T. Vt autem haec ratio innotescat cum intervallum K L est minimum; oportet secundum praedicta inquirere quis sit locus, sive linea ad quam sunt puncta T, V. Quod ut fiat sit latus rectum paraboloidis A B F ∞ a; S K ∞ x; K T ∞ y.

Quia igitur proportionales sunt K H, K B, K M, estque H K ∞

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

$\frac{3}{2}x$:K B ex natura paraboloidis æqualis R. cub. $aax \propto y$: fiet K M, hoc eſt K T $\propto \frac{2}{3}$ R. cub. $aax \propto y$, ac proinde $\frac{8}{27} aax \propto y^3$. Vnde patet locum punctorum T, V, eſſe paraboloidem illam, quam cubicam vocant geometræ. Cui proinde ad T tangens ducetur, ſumptâ S Y duplâ ipſius S K, junctâque Y T. Et jam quidem ratio V X ad duas ſimul V X, X T, quam diximus eandem eſſe ac K L ad M N, erit ea quæ Y K ad utramque ſimul Y K, K T. Hæc autem ratio data eſt, ergo & ratio K L ad M N. Sed & rationem O B ad P B datam eſſe oſtenſum eſt. Ergo, cum ex duabus hiſce componatur ratio B D ad D M, ut ſupra patuit, dabitur & hæc; & dividendo, ratio B M ad M D; adeoque & punctum D in curva D E.

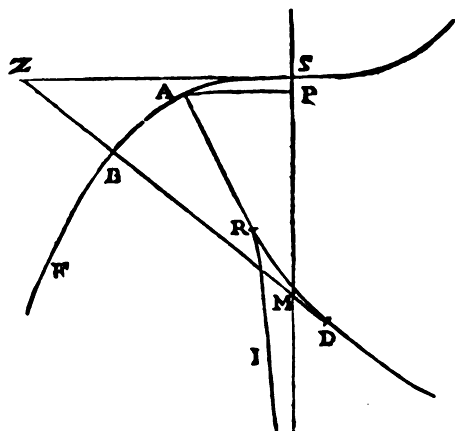


Ad conſtructionem autem breviſſimam hoc pacto hic perveniemus. K T ſive K M dicta fuit y. Itaque M H erit $y + \frac{3}{2}x$. Et M H ad H K, ſive O B ad B P, ut $y + \frac{3}{2}x$ ad $\frac{3}{2}x$. ſive, ſumptis omnium duplis, ut $2y + 3x$ ad $3x$. Deinde quia Y K $\propto 3x$, erit Y K ad Y K + K T, ſive per prædicta, K L ad M N, ut $3x$ ad $3x + y$. Atqui ex rationibus O B ad B P, & K L ad M N, componi diximus rationem B D ad D M. Ergo ratio B D ad D M erit compoſita ex rationibus $2y + 3x$ ad $3x$, & $3x$ ad $3x + y$; ideoque erit ea quæ $2y + 3x$ ad $3x + y$. & dividendo, ratio B M ad M D, eadem quæ y ad $3x + y$.

Sit S Z perpendicularis ad S K, eique occurrat M B producta in Z.

Quia ergo ratio B M ad M D inventa est ea quæ y ad $y + 3x$, hoc est quæ M K ad M K + 3 K S. Sicut autem M K ad M K + 3 K S, ita M B ad M B + 3 B Z: erit proinde M B ad M D ut M B ad M B + 3 B Z. Vnde liquet M D æqualem sumendam ipsi M B + 3 B Z. Atque ita quotlibet puncta curvæ C D E invenire licebit. Cujus curvæ portio quælibet ut D S, rectæ D B, quæ paraboloidi S A B ad angulos rectos occurrit, æqualis erit. Constat autem geometricam esse, & si velimus, possumus æquatione aliqua relationem exprimere punctorum omnium ipsius ad puncta axis S K. DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Simili modo autem, si inquiramus in paraboloide illa sive parabola cubica, in qua cubi ordinatim applicatarum ad axem, sunt inter se sicut portiones axis abscissæ, inveniemus curvam cujus evolutione describitur, quæque proinde rectæ lineæ æquari poterit, nihilo difficiliori constructione per puncta determinari. Nam si fuerit illa S A B; axis S M; (dicitur autem improprie axis in hac curva, cum forma ejus sit ejusmodi, ut ductâ S Z, quæ secet S M ad angulos rectos, ea portiones similes curvæ habeat ad partes oppo-



sitas;) agatur per punctum quodlibet B, in paraboloide sumptum, recta B D, quæ curvam ad angulos rectos secet, axique ejus occurrat in M, rectæ vero S Z in Z. Deinde sumatur F D æqualis dimidiæ B M, unà cum sesquialtera B Z. Eritque D unum è punctis curvæ quæsitæ R D vel R I, cujus evolutione, juncta tamen recta quadam R A, describetur paraboloides S A B. Sunt autem hic, quod notatu dignum est, quodque in aliis etiam nonnullis harum paraboloidum contingit, duæ evolutiones in partes contrarias, quarum utraque à puncto certo A initium capit; ita ut evolutione ipsius A R D, in infinitum porro continuata, describatur paraboloidis pars infinita A B F; evolutione autem totius F H K, similiter in infinitum extensæ, tantum particula A S. Punctum autem A definitur, sumptâ S P quæ sit ad

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

latus rectum paraboloidis, sicut unitas ad radicem quadrato-quadraticam numeri 91125, (is cubus est ex 45) applicatâque ordinatim P A. Unde porro punctum R, confinium duarum curvarum R D, R I, invenitur sicut cætera omnia harum curvarum, hoc est, sicut punctum D modo inventum fuit.

Denique, quæcunque fuerit ex paraboloidum genere curva S A B, semper æque facile curvam aliam, cujus evolutione ipsa describatur, quæque propterea rectæ adæquari possit, per puncta inveniri comperimus. Atque adeo constructionem universalem sequenti tabella exhibemus, quæ quousque libuerit extendi poterit.

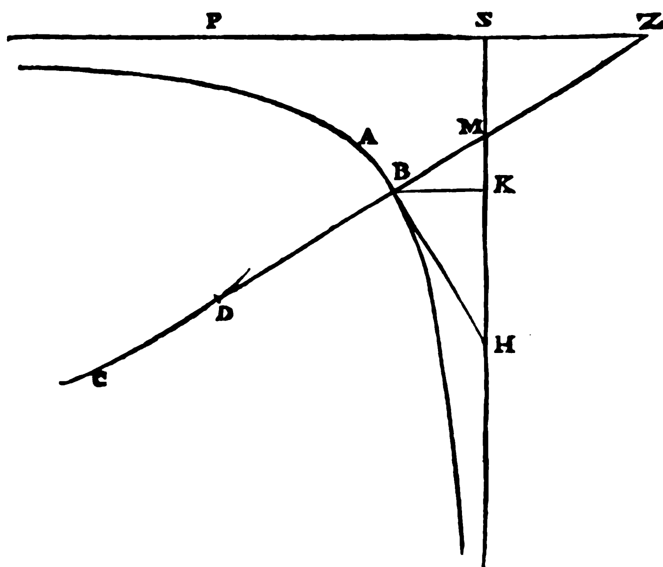
$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l} ax \propto y^2 \\ a^2x \propto y^3 \\ ax^2 \propto y^3 \\ ax^3 \propto y^4 \\ a^3x \propto y^4 \end{array}\right. \quad \text{Erit}\left\{\begin{array}{l} BM + 2\,BZ \\ \tfrac{1}{2}\,BM + \tfrac{3}{2}\,BZ \\ 2\,BM + 3\,BZ \\ 3\,BM + 4\,BZ \\ \tfrac{1}{3}\,BM + \tfrac{4}{3}\,BZ \end{array}\right\} \propto BD.$$

Sit S B parabola, vel paraboloidum aliqua, cujus vertex S; recta S K vel axis, vel axi perpendicularis, ad quam referuntur æquatione puncta paraboloidis; & ipsa quidem S K semper ad partem cavam ducta intelligitur; cui perpendicularis S Z. Ponendo jam S K $\propto x$; B K $\propto y$, quæ à puncto quovis curvæ perpendicularis est ipsi S K; & latere recto curvæ $\propto a$; prior pars tabellæ, quæ ad sinistram est, naturam singularum paraboloidum singulis æquationibus explicat. Quibus respondent in parte dextra quantitates lineæ B D, quæ si curvæ S A B insistat ad angulos rectos, exhibitura sit punctum D in

in curva quæsita C D. Exempli gratia, si S B est parabola quæ ex coni sectione fit, ei scimus convenire æquationem tabellæ primam, $ax \infty y^2$; cui respondet ab altera parte B M + 2 B Z ∞ B D. Unde longitudo lineæ B D cognoscitur, adeoque inventio quotlibet punctorum curvæ C D. Quam quidem, hoc casu, paraboloidem esse supra demonstratum fuit, eam nempe, cujus æquatio tertia est hujus tabellæ.

Construitur autem tabella hoc pacto, ut B M sumatur multiplex secundum numerum qui est exponens potestatis x in æquatione; B Z vero, multiplex secundum exponentem potestatis y; ex his autem utrisque compositæ accipiatur pars denominata ab exponente potestatis a.

Præter hasce autem paraboloides lineas, alias item invenimus, à quibus, non absimili constructione, deducuntur curvæ rectis comparabiles. Assimilantur autem hyperbolis, eo quod asymptotos suas habent, sed tantum angulum rectum constituentes. Et harum primam quidem statuimus hyperbolam ipsam, quæ est è coni sectione.



Reliquarum vero naturam ut explicemus; sunto P S, S K, asymptoti curvæ A B, rectum angulum comprehendentes, & à curvæ puncto quolibet B ducatur B K parallela P S, sitque S K ∞ x; K B ∞ y. Si igitur hyperbola sit A B, scimus rectangulum linearum S K, K B, hoc est, rectangulum xy semper eidem quadrato æquale esse, quod vocetur aa.

Proxima vero hyperboloidum erit, in qua solidum ex quadrato

M

lineæ S K, in altitudinem K B ductum, hoc est, solidum xxy, cubo certo æquabitur, qui vocetur a^3. Atque ita innumeræ aliæ hujus generis hyperboloides existunt, quarum proprietatem sequens tabella singulis æquationibus exhibet, simulque rationem construendi curvam D C, cujus evolutione quæque generetur.

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} xy \infty a^2 \\ x^2y \infty a^3 \\ xy^2 \infty a^3 \\ x^3y \infty a^4 \\ xy^3 \infty a^4 \end{array} \right\} \text{Erit} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\,BM + \frac{1}{2}\,BZ \\ \frac{2}{3}\,BM + \frac{1}{3}\,BZ \\ \frac{1}{3}\,BM + \frac{2}{3}\,BZ \\ \frac{3}{4}\,BM + \frac{1}{4}\,BZ \\ \frac{1}{4}\,BM + \frac{3}{4}\,BZ \end{array} \right\} \infty\ BD.$$

Recta D B M Z curvam A B, ut antea quoque, secat ad angulos rectos, occurritque asymptotis S K, S P, in M & Z. Si igitur exempli gratia hyperbola fuerit A B, cujus æquatio est $xy \infty a^2$, sumetur B D ∞ $\frac{1}{2}$ B M + $\frac{1}{2}$ B Z, quemadmodum tabella præcipit. Eritque punctum D in curva D C quæsita, cujus alia quotlibet puncta sic inveniri poterunt, & portio ejus quælibet rectæ lineæ adæquari. Et hæc quidem eadem illa est curva, cujus relationem ad axem hyperbolæ superius æquatione expressimus. Constructio autem tabellæ hujus plane eadem est quæ superioris.

Cæterum, quoniam tum ad harum curvarum, tum ad earum quæ ex paraboloidibus nascuntur constructionem, ducendæ sunt lineæ D B Z, quæ ad datum punctum B secent curvas A B, sive ipsarum tangentes B H, ad angulos rectos; dicemus in universum quomodo hæ tangentes inveniantur. In æquatione itaque, quæ cujusque curvæ naturam explicat, quales æquationes duabus tabellis præcedentibus exponuntur, considerare oportet quæ sint exponentes potestatum x & y, & facere ut, sicut exponens potestatis x ad exponentem potestatis y, ita sit S K ad K H. Iuncta enim H B curvam in B continget. Velut in tertia hyperboloide, cujus æquatio est $xy^2 \infty a^3$: quia exponens potestatis x est 1, potestatis autem y exponens 2; oportet esse ut 1 ad 2 ita S K ad K H. Horum autem demonstrationem noverunt analyticæ artis periti, qui jam pridem omnes has lineas contemplari cœperunt; & non solum paraboloidum istarum, sed & spatiorum quorundam infinitorum, inter hyperboloides & asymptotos interjectorum, plana solidaque dimensi sunt. Quod quidem & nos, facili atque universali methodo, expedire possemus, ex sola tangentium proprietate sumpta demonstratione. Sed illa non sunt hujus loci.





HOROLOGII OSCILLATORII

PARS QVARTA.

De centro Oscillationis.

CEntrorum Oscillationis, seu Agitationis, investigationem olim mihi, fere adhuc puero, aliisque multis, doctissimus Mersennus proposuit, celebre admodum inter illius temporis Geometras problema, prout ex litteris ejus ad me datis colligo, nec non ex Cartesii haud pridem editis, quibus ad Mersennianas super his rebus responsum continetur. Postulabat autem centra illa ut invenirem in circuli sectoribus, tam ab angulo quam à medio arcu suspensis, atque in latus agitatis, item in circuli segmentis, & in triangulis, nunc ex vertice, nunc ex media basi pendentibus Quod eo redit, ut pendulum simplex, hoc est, pondus filo appensum reperiatur ea longitudine, ut oscillationes faciat temporum eorundem ac figuræ istæ, uti dictum est, suspensæ. Simul vero pretium operæ, si forte quæsitis satisfecissem, magnum sane & invidiosum pollicebatur. Sed à nemine id quod desiderabat tunc obtinuit. Nam me quod attinet, cum nihil reperirem quo vel primus aditus ad contemplationem eam patesceret; velut à limine repulsus, longiori investigatione tunc quidem abstinui. Qui vero rem sese confecisse sperabant viri insignes, Cartesius, Honoratus Fabrius, aliique, nequaquam scopum attigerunt, nisi in paucis quibusdam facilioribus, sed quorum tamen demonstrationem nullam idoneam, ut mihi videtur, attulerunt. Idque comparatione eorum quæ hic trademus manifestum fore spero, si quis forte quæ ab illis tradita sunt, cum nostris hisce contulerit; quæ quidem & certioribus principiis demonstrata arbitror, & experimentis prorsus convenientia reperi. Occasio vero ad hæc denuo tentanda, ex pendulorum automati nostri temperandorum ratione oblata est, dum pondus mobile, præter id quod in imo est, illis applico, ut in descriptione horologii fuit explicatum. Hinc melioribus auspiciis atque à prima origine rem exorsus, tandem difficultates omnes superavi, nec tantum problematum Mersennianorum solutionem, sed alia quoque illis difficiliora reperi, &

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

viam denique, qua in lineis, superficiebus, solidisque corporibus certa ratione centrum illud investigare liceret. Vnde quidem, præter voluptatem inveniendi quæ multum ab aliis quæsita fuerant, cognoscendique in his rebus naturæ leges decretaque, utilitatem quoque eam cepi, cujus gratia primo animum ad hæc applicueram, reperta illa horologii temperandi ratione facili & expedita. Accessit autem hoc quoque, quod pluris faciendum arbitror, ut certæ, sæculisque omnibus duraturæ, mensuræ definitionem absolutissimam per hæc tradere possem; qualis est ea quæ ad finem horum adjecta reperietur.

DEFINITIONES.

I.

Pendulum dicatur figura qualibet gravitate prædita, sive linea fuerit, sive superficies, sive solidum, ita suspensa ut circa punctum aliquod, vel axem potius, qui plano horizontis parallelus intelligitur, motum reciprocum vi gravitatis suæ continuare possit.

II.

Axis ille horizontis plano parallelus, circa quem penduli motus fieri intelligitur, dicatur axis Oscillationis.

III.

Pendulum simplex dicatur quod filo vel linea inflexili, gravitatis experte, constare intelligitur, ima sui parte pondus affixum gerente; cujus ponderis gravitas, velut in unum punctum collecta, censenda est.

IV.

Pendulum verò compositum, quod pluribus ponderibus constat, immutabiles distantias servantibus, tum inter se, tum ab axe Oscillationis. Hinc figura qualibet suspensa, ac gravitate prædita, pendulum compositum dici potest, quatenus cogitatu in partes quotlibet est divisibilis.

V.

Pendula isochrona vocentur, quorum Oscillationes, per arcus similes, æqualibus temporibus peraguntur.

VI.

Planum Oscillationis dicatur illud, quod per centrum gravitatis figuræ suspensæ duci intelligitur, ad axem oscillationis rectum. De centro Oscillationis.

VII.

Linea centri, recta quæ per centrum gravitatis figuræ ducitur, ad axem oscillationis perpendicularis.

VIII.

Linea perpendiculi, recta in plano oscillationis, ducta ab axe oscillationis, ad horizontis planum perpendicularis.

IX.

Centrum oscillationis vel agitationis figuræ cujuslibet, dicatur punctum in linea centri, tantum ab axe oscillationis distans, quanta est longitudo penduli simplicis quod figuræ isochronum sit.

X.

Axis gravitatis, linea quævis recta, per centrum gravitatis figuræ transiens.

XI.

Figura plana, vel linea in plano sita, in planum agitari dicatur, cum axis oscillationis in eodem cum figura lineave est plano.

XII.

Eadem vero in latus agitari dicantur, cum axis oscillationis ad figuræ lineæve planum rectus est.

XIII.

Quando pondera in rectas lineas duci dicentur, id ita est intelligendum, ac si numeri lineæve, quantitates ponderum rationemque inter se mutuam exprimentes, ita ducantur.

HYPOTHESES.

I.

SI pondera quotlibet, vi gravitatis suæ, moveri incipiant; non posse centrum gravitatis ex ipsis compositæ altius, quam ubi incipiente motu reperiebatur, ascendere.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Altitudo autem in his secundum distantiam à plano horizontali consideratur, graviaque ponuntur ad hoc planum, secundum rectas ipsi perpendiculares, descendere conari. Quod idem ab omnibus, qui de centro gravitatis egerunt, vel ponitur expresse, vel à legentibus supplendum est, cum absque eo centri gravitatis consideratio locum non habeat.

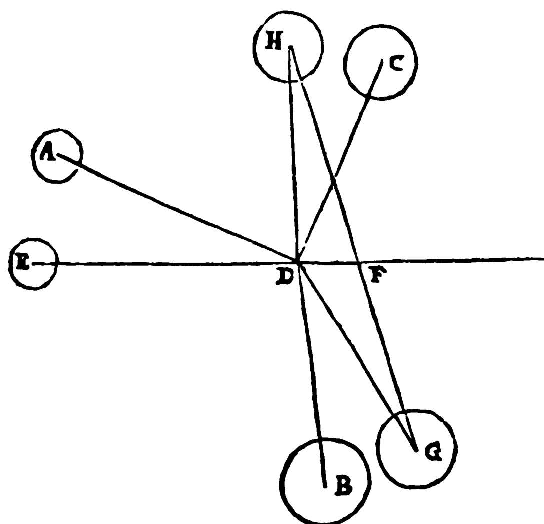
Ipsa vero hypothesis nostra quominus scrupulum moveat, nihil aliud sibi velle eam ostendemus, quam quod nemo unquam negavit, gravia nempe sursum non ferri. Nam primo, si unum quodpiam corpus grave proponamus, illud vi gravitatis suæ altius ascendere non posse extra dubium est. ascendere autem tunc intelligitur scilicet, cum ejus centrum gravitatis ascendit. Sed & idem de quotlibet ponderibus, inter se per lineas inflexiles conjunctis, concedi necesse est, quoniam nihil vetat ipsa tanquam unum aliquod considerari. Itaque neque horum commune gravitatis centrum ultro ascendere poterit.

Quod si jam pondera quotlibet non inter se connexa ponantur, illorum quoque aliquod commune centrum gravitatis esse scimus. Cujus quidem centri quanta erit altitudo, tantam ajo & gravitatis ex omnibus compositæ altitudinem censeri debere; siquidem omnia ad eandem illam centri gravitatis altitudinem deduci possunt, nullâ aliâ accersitâ potentiâ quam quæ ipsis ponderibus inest, sed tantum lineis inflexilibus ea pro lubitu conjungendo, ac circa gravitatis centrum movendo; ad quod nulla vi neque potentia determinata opus est. Quare, sicut fieri non potest ut pondera quædam, in plano eodem horizontali posita, supra illud planum, vi gravitatis suæ, omnia æqualiter attollantur; ita nec quorumlibet ponderum, quomodocunque dispositorum, centrum gravitatis ad majorem quam habet altitudinem pervenire poterit. Quod autem diximus pondera quælibet, nulla adhibita vi, ad planum horizontale, per centrum commune gravitatis eorum transiens, perduci posse, sic ostendetur.

Sint pondera A, B, C, positione data, quorum commune gravitatis centrum sit D. per quod planum horizontale ductum ponatur, cujus sectio recta E F. Sint jam lineæ inflexiles D A, D B, D C, quæ pondera sibi invariabiliter connectant; quæ porro moveantur, donec A sit in plano E F ad E. Virgis vero omnibus per æquales angulos delatis, erunt jam B in G, & C in H.

Rursus jam B & C connecti intelligantur virgâ H G, quæ secet planum E F in F; ubi necessario quoque erit centrum gravitatis bino-

rum istorum ponderum connexorum, cum trium, in E, B, H, positorum, centrum gravitatis sit D, & ejus quod est in E, centrum gravitatis sit quoque in plano E D F. Moventur igitur rursus pondera H, G, super puncto F, velut axe, absque vi ulla, ac simul utraque ad planum E F adducuntur, adeo ut jam tria, quæ prius erant in A, B, C, ad ipsam sui centri gravitatis D altitudinem, suo ipsorum æquilibrio, translata appareat. quod erat ostendendum. Eademque de quotcunque aliis est demonstratio.



Hæc autem hypothesis nostra ad liquida etiam corpora valet, ac per eam non solum omnia illa, quæ de innatantibus habet Archimedes, demonstrari possunt, sed & alia pleraque Mechanicæ theoremata. Et sanè, si hac eadem uti scirent novorum operum machinatores, qui motum perpetuum irrito conatu moliuntur, facile suos ipsi errores deprehenderent, intelligerentque rem eam mechanica ratione haud quaquam possibilem esse.

II.

Remoto aëris, alioque omni impedimento manifesto, quemadmodum in sequentibus demonstrationibus id intelligi volumus, centrum gravitatis penduli agitati, æquales arcus descendendo ac ascendendo percurrere.

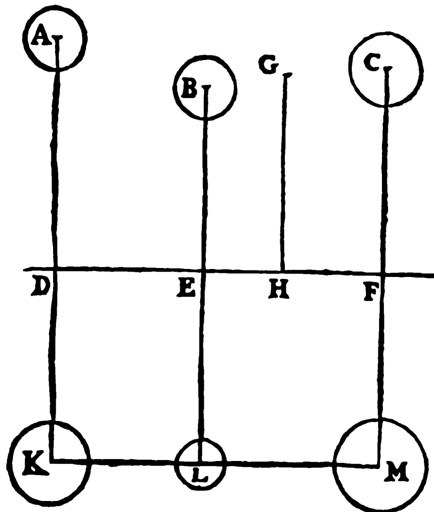
De pendulo simplici hoc demonstratum est propositione 9 de Descensu gravium. Idem vero & de composito tenendum esse declarat experientia; si quidem, quæcunque fuerit penduli figura,

æque apta continuando motui reperitur, nisi in quantum plus minusve aëris objectu impeditur.

PROPOSITIO I.

Ponderibus quotlibet ad eandem partem plani existentibus, si à singulorum centris gravitatis agantur in planum illud perpendiculares; hæ singulæ in sua pondera ductæ, tantundem simul efficient, ac perpendicularis, à centro gravitatis ponderum omnium in planum idem cadens, ducta in pondera omnia.

Sint pondera A, B, C, sita ad eandem partem plani, cujus sectio recta D F, inque ipsum à singulis ponderibus ducantur perpendiculares A D, B E, C F. Sit autem G punctum centrum gravitatis ponderum omnium A, B, C, à quo ducatur perpendicularis in idem planum G H. Dico summam productorum, quæ fiunt à singulis ponderibus in suas perpendiculares, æquari producto ab recta G H in omnia pondera A, B, C.



Intelligantur enim perpendiculares, à singulis ponderibus eductæ, continuari in alteram partem plani D F, sintque singulæ D K, E L, F M, ipsi H G æquales; omnesque lineæ, inflexiles virgas referant, ad horizontem parallelas; & ponantur in K, L, M, gravitates ejusmodi, quæ singulæ cum sibi oppositis A, B, C, æquilibrium faciant ad intersectionem plani D E F. Omnes igitur K, L, M, æquiponderabunt omnibus A, B, C. Erit autem, sicut longitudo A D ad D K, ita pondus K ad pondus A, ac proinde D A ducta in magnitudinem A, æquabitur D K, sive G H, ductæ in K. Similiter

ter E B in B æquabitur E L, sive G H, in L; & F C in C æquabitur F M, sive G H, in M. Ergo summa productorum ex A D in A, B E in B, C F in F, æquabitur summæ productorum ex G H in omnes K, L, M. Quum autem K, L, M, æquiponderent ipsis A, B, C, etiam iisdem A, B, C, ex centro ipsorum gravitatis G suspensis, æquiponderabunt. Vnde, cum distantia G H æqualis sit singulis D K, E L, F M, necesse est magnitudines A, B, C, simul sumptas, æquari ipsis K, L, M. Itaque & summa productorum ex G H in omnes A, B, C, æquabitur productis ex D A in A, E B in B, & F C in C. quod erat demonstrandum.

Etsi vero in demonstratione positæ fuerint rectæ A D, G H, C F, horizonti parallelæ, & planum ad horizontem erectum; patet, si omnia simul in alium quemlibet situm transponantur, eandem manere productorum æqualitatem, cum rectæ omnes sint eædem quæ prius. Quare constat propositum.

PROPOSITIO II.

Positis quæ prius, si pondera omnia A, B, C, *sint æqualia; dico summam omnium perpendicularium* A D, B E, C F, *æquari perpendiculari, à centro gravitatis ductæ,* G H, *multiplici secundum ponderum numerum.*

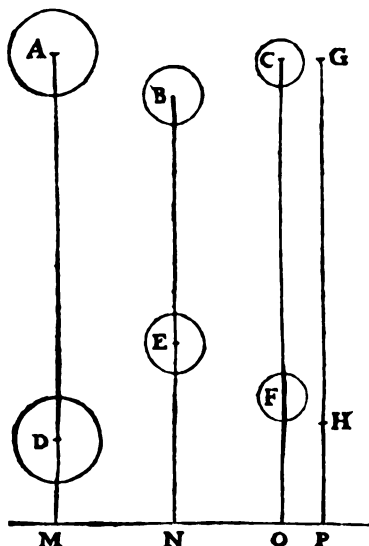
Quum enim summa productorum, à ponderibus singulis in suas perpendiculares, æquetur producto ex G H in pondera omnia; sitque hic, propter ponderum æqualitatem, summa illa productorum æqualis producto ex uno pondere in summam omnium perpendicularium; itemque productum ex G H in pondera omnia, idem quod productum ex pondere uno in G H, multiplicem secundum ponderum numerum: patet summam perpendicularium necessario jam æquari ipsi G H, multiplici secundum ponderum numerum. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Si magnitudines quædam descendant omnes, vel ascendant, licet inæqualibus intervallis; altitudines descensus vel ascensus cujusque, in ipsam magnitudinem ductæ, efficient summam productorum æqualem ei, quæ fit ex altitudine descensus vel ascensus centri gravitatis omnium magnitudinum, ducta in omnesmagnitudines.

De centro Oscillationis.

Sunto magnitudines A, B, C, quæ ex A, B, C, descendant in D, E, F; vel ex D, E, F, ascendant in A, B, C. Sitque earum centrum gravitatis omnium, dum sunt in A, B, C, eadem altitudine cum puncto G; cum vero sunt in D, E, F, eadem altitudine cum puncto H. Dico summam productorum ex altitudine A D in A, B E in B, C F in C, æquari producto ex G H in omnes A, B, C.



Intelligatur enim planum horizontale cujus sectio recta M P, atque in ipsum incidant productæ A D, B E, C F & G H, in M, N, O, P. Quia igitur summa productorum ex A M in A, B N in B, C O in C, æqualis est facto ex G P in omnes A, B, C *. Similiterque summa productorum ex D M in A, E N in B, F O in C, æqualis facto ex H P in omnes A, B, C; sequitur & excessum priorum productorum supra posteriora, æquari facto ex G H in omnes magnitudines A, B, C. Dictum vero excessum æquari manifestum est productis ex A D in A, B E in B, C F in C. Ergo hæc simul etiam æqualia erunt producto ex G H in omnes A, B, C. quod erat demonstrandum.

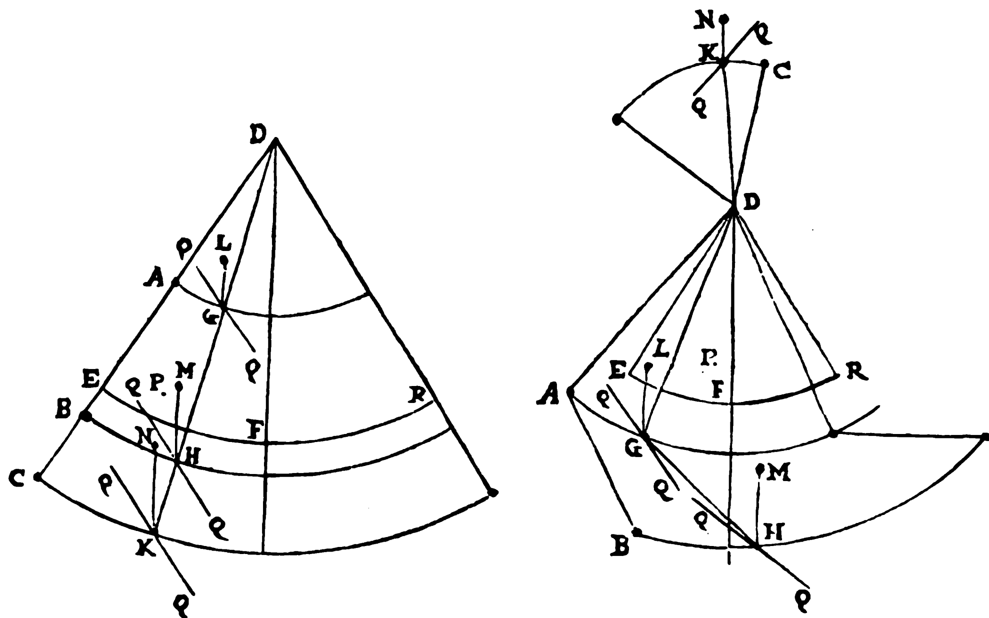
* Prop. 1. huj.

PROPOSITIO IV.

SI pendulum è pluribus ponderibus compositum, atque è quiete dimissum, partem quamcunque oscillationis integra confecerit, atque inde porro intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quousque possunt ascendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus composita, ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam oscillationem obtinebat.

Sit pendulum compositum ex ponderibus quotlibet A, B, C, virgæ, vel superficiei pondere carenti, inhærentibus. Sitque suspensum ab axe per D punctum ducto, qui ad planum, quod hic conspicitur, perpendicularis intelligatur. In quo eodem plano etiam centrum gravitatis E, ponderum A, B, C, positum sit; lineaque centri D E, inclinetur ad lineam perpendiculi D F, angulo E D F: attracto, nimirum, eo usque pendulo. Hinc vero dimitti jam ponatur, ac partem quamlibet oscillationis conficere, ita ut pondera A, B, C, perveniant in G, H, K. Vnde, relicto deinceps communi vinculo, singula intelligantur acquisitas celeritates sursum convertere, (quod impingendo in plana quædam inclinata, velut Q Q, fieri poterit,) & quousque possunt ascendere, nempe in L, M, N. Quo ubi pervenerint, sit centrum gravitatis omnium punctum P. Dico hoc pari altitudine esse cum puncto E.

De centro Oscillationis.



Nam primum quidem, constat P non altius esse quam E, ex prima sumptarum hypothesium. Sed nec humilius fore sic ostendemus. Sit enim, si potest, P humilius quam E, & intelligantur pondera ex iisdem, ad quas ascenderunt, altitudinibus recidere, quæ sunt L G, M H, N K. Vnde quidem easdem celeritates ipsis acquiri constat, quas habebant ad ascendendum ad istas altitudines*, hoc est, eas ipsas quas acquisierant motu penduli ex C B A D in K H G D. Quare, si cum dictis celeritatibus ad virgam superficiemve, cui innexa fuere, nunc referantur, eique simul adhærescant, motumque secundum inceptos arcus continuent; quod fiet, si priusquam virgam attingant, à planis inclinatis Q Q repercussa intelli-

* Propos. 4. part. 2.

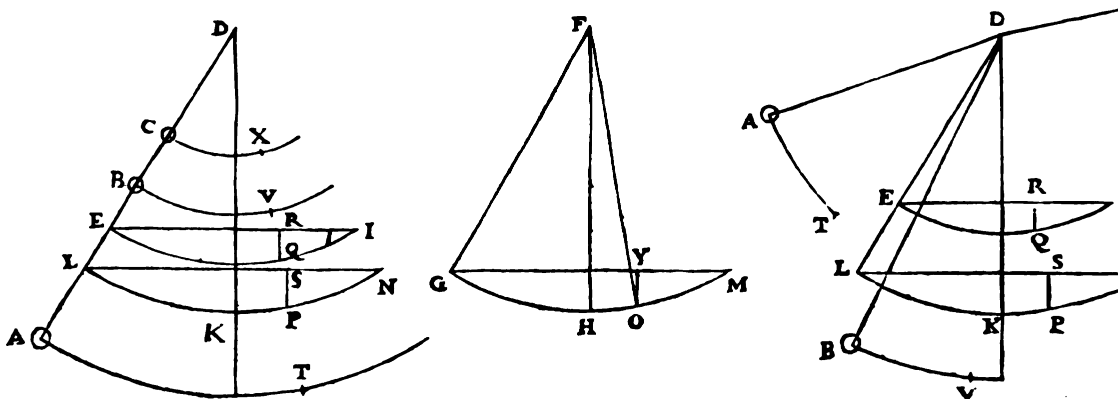
gantur; absolvet, hoc modo restitutum pendulum, oscillationis partem reliquam, æquè ac si absque ulla interruptione motum continuasset. Ita ut centrum gravitatis penduli, E, arcus æquales E F, F R, descendendo ac ascendendo percurrat, ac proinde in R eadem ac in E altitudine reperiatur. Ponebatur autem E esse altius quam P centrum gravitatis ponderum in L, M, N, positorum. Ergo & R altius erit quam P: adeoque ponderum ex L, M, N, delapsorum centrum gravitatis, altius, quam unde descenderat, ascendisset. quod est absurdum *. Non igitur centrum gravitatis P humilius est quam E. Sed nec altius erat. Ergo æque altum sit necesse est. quod erat demonstrandum.

* Hypoth. 1. huj.

PROPOSITIO V.

Dato pendulo ex ponderibus quotlibet composito, si singula ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam, in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis; orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sive distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi.

Sint pondera pendulum componentia, (quorum nec figura nec magnitudo, sed gravitas tantum consideretur), A, B, C, suspensa



ab axe, qui per punctum D, ad planum quod conspicitur, rectus intelligitur. In quo plano sit quoque eorum centrum commune gravitatis E; nam pondera in diversis esse nihil refert. Distantia puncti E ab axe, nempe recta E D, vocetur d. Item ponderis A distantia A D, sit e; B D, f; C D, g. Ducendo itaque singula pondera in qua-

drata suarum distantiarum, erit productorum summa $aee + bff$ + cgg. Et rursus, ducendo summam ponderum in distantiam centri gravitatis omnium, productum æquale erit $ad + bd + cd$*. Unde, productum prius per hoc dividendo, habebitur $\frac{aee + bff + cgg}{ad + bd + cd}$. Cui longitudini si æqualis statuatur longitudo penduli simplicis F G, quæ etiam x vocabitur; dico hoc illi composito isochronum esse. DE CENTRO OSCILLATIONIS. * Prop 1 huj.

Ponantur enim tum pendulum F G, tum linea centri D E, æqualibus angulis à linea perpendiculi remota, illud ab F H, hæc ab D K, atque inde dimissa librari, & in recta D E sumatur D L æqualis F G. Itaque pondus G penduli F G, integra oscillatione arcum G M percurret, quem linea perpendiculi F H medium secabit. punctum vero L arcum illi similem & æqualem L N, quem medium dividet D K. Itemque centrum gravitatis E, percurret similem arcum E I. Quod si in arcubus G M, N L, sumptis punctis quibuslibet, similiter ipsos dividentibus, ut O & P, eadem celeritas esse ostendatur ponderis G in O, & puncti L in P; constabit inde æqualibus temporibus utrosque arcus percurri, ac proinde pendulum F G, pendulo composito ex A, B, C, isochronum esse. Ostendetur autem hoc modo.

Sit primo, si potest, major celeritas puncti L, ubi in P pervenit, quam ponderis G in O. Constat autem, dum punctum L percurrit arcum L P, simul centrum gravitatis E percurrere arcum similem E Q. Ducantur à punctis Q, P, O, perpendiculares sursum, quæ occurrant subtensis arcuum E I, L N, G M, in R, S, Y. & S P vocetur y. Unde, cum sit ut L D, x, ad E D, d, ita S P, y, ad R Q; erit R Q æqualis $\frac{dy}{x}$. Iam quia pondus G eam celeritatem habet in O, qua valet ad eandem unde descendit altitudinem ascendere, nempe per arcum O M, vel perpendicularem O Y ipsi P S æqualem; punctum igitur L, ubi in P pervenerit, majorem ibi celeritatem habebit, quam qua ascenditur ad altitudinem P S. Dum vero L transit in P, simul pondera A, B, C, similes arcus percurrunt ipsi L P, nimirum A T, B V, C X. Estque puncti L celeritas in P, ad celeritatem ponderis A in T, quum vinculo eodem contineantur, sicut distantia D L ad D A. Sed ut quadratum celeritatis puncti L, quam habet in P, ad quadratum celeritatis puncti A in T, ita est altitudo ad quam illa celeritate ascendi potest, ad altitudinem quò hac celeritate ascendi potest*. Ergo etiam, ut quadratum distantiæ D L, quod est xx, ad quadratum distantiæ D A, quod est ee, ita est altitudo quo ascenditur celeritate puncti L, quum est in P, (quæ altitudo major dicta est quam P S sive y,) ad altitudinem quo ascenditur celeritate ponderis A in T; si nempe postquam in T pervenit, relicto pendulo, * Prop 3 & 4 part. 2.

seorsim motum suum sursum converteret. Quæ proinde altitudo major erit quam $\frac{eey}{xx}$.

Eadem ratione, erit altitudo ad quam ascenderet pondus B, celeritate acquisita per arcum B V, major quam $\frac{ffy}{xx}$. Et altitudo ad quam ascenderet pondus C, celeritate acquisita per arcum C X, major quam $\frac{ggy}{xx}$. Vnde, ductis singulis altitudinibus istis in sua pondera, erit summa productorum major quam $\frac{aeey + bffy + cggy}{xx}$. quæ proinde major quoque probatur quam $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$. Nam quia posita est longitudo x æqualis $\frac{aee + bff + cgg}{ad + bd + cd}$; erit $a\,dx + b\,dx + c\,dx$ æquale $aee + bff + cgg$. Et ductis omnibus in y, & dividendo per xx, erit $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ æquale $\frac{aeey + bffy + cggy}{xx}$. Vnde quod dictum est consequitur. Est autem summa ista productorum æqualis ei, quod fit ducendo altitudinem, ad quam ascendit centrum gravitatis commune ponderum A, B, C, in summam ipsorum ponderum, $a + b + c$; si nempe singula, uti dictum, seorsim quousque possunt moveantur. Quantitas vero $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ producitur ex descensu centri gravitatis eorundem ponderum, (qui descensus est R Q, sive $\frac{dy}{x}$, ut supra inventum fuit,) in eandem quoque ponderum summam $a + b + c$. Ergo quum prius productum altero hoc majus ostensum fuerit, sequitur ascensum centri gravitatis ponderum A, B, C, si, relicto pendulo ubi pervenere in T, V, X, singula celeritates acquisitas sursum convertant, majorem fore ejusdem centri gravitatis descensu, dum ex A, B, C, moventur in T, V, X. quod est absurdum, cum dictus ascensus descensui æqualis esse debeat, per antecedentem.

Eodem modo, si dicatur celeritatem puncti L, ubi pervenerit in P, minorem esse celeritate ponderis G quum in O pervenerit; ostendemus ascensum possibilem centri gravitatis ponderum A, B, C, minorem esse quam descensum, quod eidem propositioni antecedenti repugnat. Quare relinquitur ut eadem sit celeritas puncti L, ad P translati, quæ ponderis G in O. Vnde, ut superius dictum, sequitur pendulum simplex F G composito ex A, B, C, isochronum esse.

PROPOSITIO VI.

Dato pendulo ex quotcunque ponderibus æqualibus composito; si summa quadratorum factorum à distantiis, quibus unumquodque pondus abest ab axe oscillationis, ap-

plicetur ad distantiam centri gravitatis communis ab eodem oscillationis axe, multiplicem secundum ipsorum ponderum numerum, orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni.

De centro Oscillationis.

Sint posita eadem quæ prius, sed pondera omnia inter se æqualia intelligantur, & singula dicantur a. Rursus vero nulla eorum magnitudo consideretur, sed pro minimis habeantur, quantum ad extensionem.

Itaque penduli simplicis isochroni longitudo, per propositionem antecedentem, erit $\frac{aee + aff + agg}{ad + ad + ad}$. Vel, quia quantitas divisa ac dividens utraque per a dividitur, fiet nunc eadem longitudo, $\frac{ee + ff + gg}{3d}$. Quo significatur summa quadratorum à distantiis ponderum ab axe oscillationis, applicata ad distantiam centri gravitatis omnium ab eodem oscillationis axe, multiplicem secundum numerum ipsorum ponderum, qui hic est 3. facile enim perspicitur numerum hunc, in quem ducitur distantia d, respondere necessario ipsi ponderum numero. Quare constat propositum.

Quod si pondera æqualia in unam lineam rectam conjuncta sint, atque ex termino ejus superiore suspensa; constat distantiam centri gravitatis, ex omnibus compositæ, ab axe oscillationis, multiplicem secundum ponderum numerum, æquari summæ distantiarum omnium ponderum ab eodem oscillationis axe *; ac proinde, hoc casu, habebitur quoque longitudo penduli simplicis, composito isochroni, si summa quadratorum à distantiis ponderum singulorum ab axe oscillationis, dividatur per summam earundem omnium distantiarum.

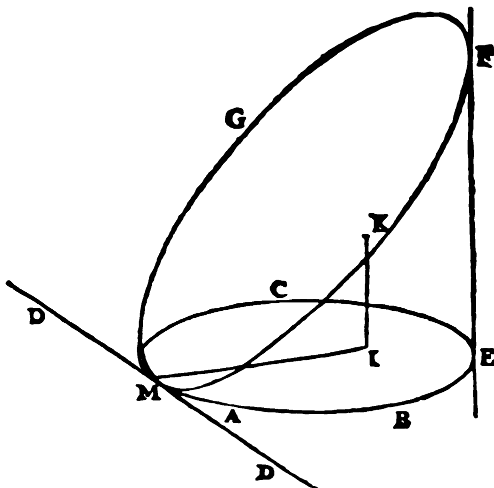
* Prop. 2. huj.

DEFINITIO XIV.

SI fuerint in eodem plano, figura quædam, & linea recta quæ ipsam extrinsecus tangat; & per ambitum figuræ alia recta, plano ejus perpendicularis, circumferatur, superficiemque quandam describat, quæ deinde secetur plano per dictam tangentem ducto & ad dictæ figuræ planum inclinato; solidum comprehensum à duobus planis istis, & parte superficiei descriptæ, inter utrumque planum intercepta, vocetur Cuneus super figura illa, tanquam basi, abscissus.

In schemate adjecto, est A B E C figura data; recta eam tangens

MD; quæ vero per ambitum ejus circumfertur, EF; cuneus au-



tem figura solida planis ABEC, MFG, & parte superficiei, à recta EF descriptæ, comprehensa.

DEFINITIO XV.

Distantia inter rectam, per quam cuneus abscissus est, & punctum baseos, in quod perpendicularis cadit à cunei centro gravitatis, dicatur cunei Subcentrica. Nempe in figura eadem, si K *sit centrum gravitatis cunei, recta vero* K I *ad basin ejus* A B E C *perpendicularis ducta sit, & rursus* I M *perpendicularis ad* A D; *erit* I M, *quam subcentricam dicimus.*

PROPOSITIO VII.

Cuneus super plana figura qualibet abscissus, plano inclinato ad angulum semirectum, æqualis est solido, quod fit ducendo figuram eandem, in altitudinem æqualem distantiæ centri gravitatis figuræ, ab recta per quam abscissus est cuneus.

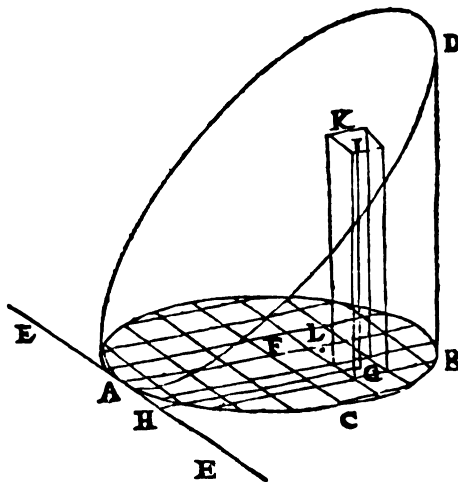
Sit, super figura plana A C B, cuneus A B D abscissus plano ad angulum semirectum inclinato, ac transeunte per E E, rectam tangentem figuram A C B, inque ejus plano sitam. Centrum vero gravitatis figuræ sit F, unde in rectam E E ducta sit perpendicularis F A. Dico cuneum A C B æqualem esse solido, quod fit ducendo figuram A C B in altitudinem ipsi F A æqualem.

Intelligatur enim figura A C B divisa in particulas minimas æquales

les quarum una G. Itaque constat, si harum singulæ ducantur in distantiam suam ab recta E E, summam productorum fore æqualem ei quod fit ducendo rectam A F in particulas omnes *, hoc est, ei quod fit ducendo figuram ipsam A C B, in altitudinem æqualem A F. Atqui particulæ singulæ ut G, in distantias suas G H ductæ, æquales sunt parallelepipedis, vel prismatibus minimis, super ipsas erectis, atque ad superficiem obliquam A D terminatis, quale est G K; quia horum altitudines ipsis distantiis G H æquantur, propter angulum semirectum inclinationis planorum A D & A C B. Patetque ex his parallelepipedis totum cuneum A B D componi. Ergo & cuneus ipse æquabitur solido super basi A C B, altitudinem habenti rectæ F A æqualem. quod erat demonstrandum.

De centro Oscillationis.

* Prop. 1. huj.



PROPOSITIO VIII.

Si figuram planam linea recta tangat, divisaque intelligatur figura in particulas minimas æquales, atque à singulis ad rectam illam perpendiculares ductæ: erunt omnium harum quadrata, simul sumpta, æqualia rectangulo cuidam, multiplici secundum ipsarum particularum numerum; quod nempe rectangulum fit à distantia centri gravitatis figuræ ab eadem recta, & à subcentrica cunei, qui per illam super figura abscinditur.

Positis enim cæteris omnibus quæ in constructione præcedenti, sit L A cunei A B D subcentrica in rectam E E. Oportet igitur ostendere, summam quadratorum omnium à distantiis particularum

figuræ A C B æquari rectangulo ab F A, L A, multiplici secundum particularum numerum.

Et constat quidem ex demonstratione præcedenti, altitudines parallelepipedorum singulorum, ut G K, æquales esse distantiis particularum, quæ ipsorum bases sunt, ut G, ab recta A E. Quare, si jam parallelepipedum G K ducamus in distantiam G H, perinde est ac si particula G ducatur in quadratum distantiæ G H. Eodemque modo se res habet in reliquis omnibus. Atqui producta omnia parallelepipedorum in distantias suas ab recta A E, æquantur simul producto ex cuneo A B D in distantiam L A *, quia cuneus gravitat super puncto L. Ergo etiam summa productorum à particulis singulis G, in quadrata suarum distantiarum ab recta A E, æquabitur producto ex cuneo A B D in rectam L A, hoc est, producto ex figura A C B in rectangulum ab F A, L A. Nam cuneus A B D, æqualis est producto ex figura A C B in rectam F A *. Rursus quia figura A C B æqualis est producto ex particula una G, in numerum ipsarum particularum; sequitur, dictum productum ex figura A C B in rectangulum ab F A, L A, æquari producto ex particula G in rectangulum ab F A, L A, multiplici secundum numerum particularum G. Cui proinde etiam æqualis erit dicta summa productorum, à particulis singulis G in quadrata suarum distantiarum ab recta A E, sive à particula una G in summam omnium horum quadratorum. Quare, omissa utrinque multiplicatione in particulam G, necesse est summam eandem quadratorum æquari rectangulo ab F A, L A, multiplici secundum numerum particularum in quas figura A C B divisa intelligitur. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj.

* Prop. præced.

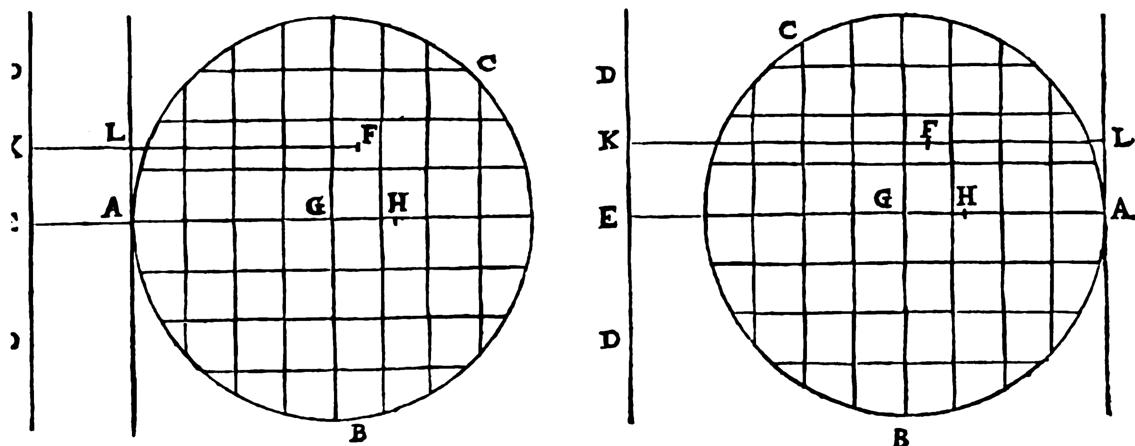
PROPOSITIO IX.

Datâ figurâ planâ & in eodem plano lineâ rectâ, quæ vel secet figuram vel non, ad quam perpendiculares cadant à particulis singulis minimis & æqualibus, in quas figura divisa intelligitur; invenire summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus; sive planum, cujus multiplex, secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summæ æquale sit.

Sit data figura plana A B C, & in eodem plano recta E D; divisâque figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, intelligantur ab unaquaque earum perpendiculares ductæ in rectam E D, sicut à particula F ducta est F K. Oporteatque invenire

summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus. *De centro Oscillationis.*

Sit datæ E D parallela recta A L, quæ figuram tangat, ac tota extra eam posita sit. Potest autem figuram vel ab eadem parte ex qua est E D, vel à parte opposita contingere. Distantia vero centri gravitatis figuræ ab recta A L sit recta G A, secans E D in E; & subcentrica cunei, super figura abscissi plano per rectam A L, sit H A. Dico summam quadratorum quæsitam æquari rectangulo A G H una cum quadrato E G, multiplicibus secundum particularum numerum, in quas figura divisa intelligitur.



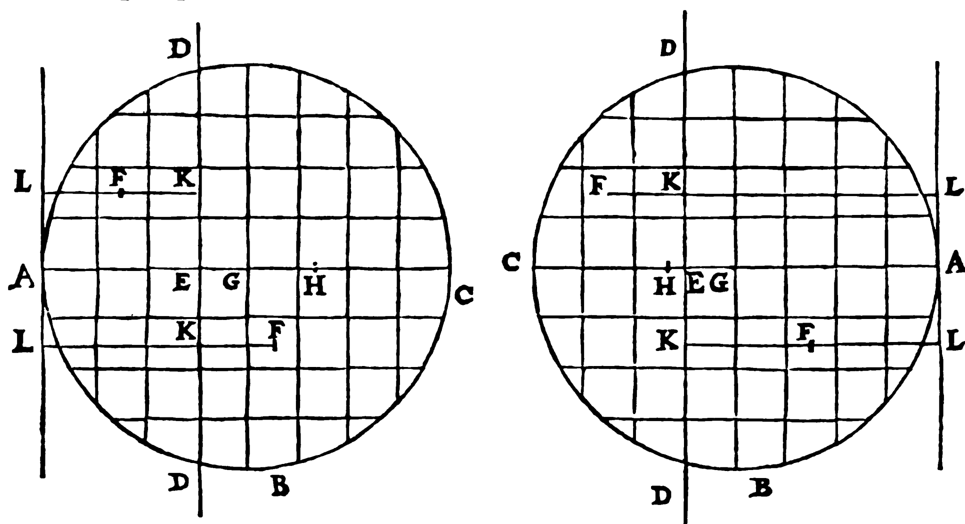
Occurrat enim F K, si opus est producta, tangenti A L in L puncto. Itaque primum, eo casu quo recta E D à figura distat, & tangens A L ad eandem figuræ partem ducta est, sic propositum ostendetur. Summa omnium quadratorum F K æquatur totidem quadratis K L, una cum bis totidem rectangulis K L F, & totidem insuper quadratis L F. Sed quadrata K L æquantur totidem quadratis E A. Et rectangula K L F æqualia esse constat totidem rectangulis E A G, quia omnes F L æquales totidem G A*. Et denique quadrata L F æquantur totidem rectangulis H A G*, hoc est, totidem quadratis A G cum totidem rectangulis A G H. Ergo quadrata omnia F K æqualia erunt totidem quadratis E A, cum totidem duplis rectangulis E A G, atque insuper totidem quadratis A G cum totidem rectangulis A G H. Atqui tria ista; nempe quadratum E A cum duplo rectangulo E A G & quadrato A G; faciunt quadratum E G. Ergo apparet quadrata omnia F K æquari totidem quadratis E G, una cum totidem rectangulis A G H. Quod erat ostendendum.

* Prop. 2. huj.
* Prop. præced.

Porro in reliquis omnibus casibus, quadrata omnia F K æquantur totidem quadratis K L, minus bis totidem rectangulis K L F, plus totidem quadratis L F; hoc est, totidem quadratis E A, minus totidem duplis rectangulis E A G, plus totidem quadratis A G, cum to-

De centro Oscillationis.

dem rectangulis A G H. Atqui, omnibus hisce casibus, fit quadratum E A, plus quadrato A G, minus duplo rectangulo E A G, æquale quadrato E G. Ergo rursus quadrata omnia F K æqualia erunt totidem quadratis E G, una cum totidem rectangulis A G H. Quare constat propositum.

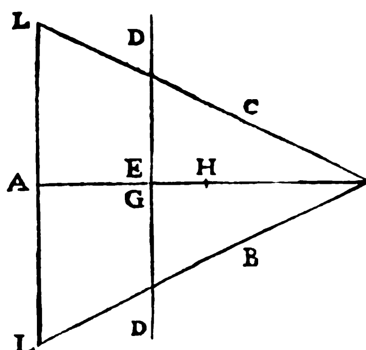


Hinc sequitur, rectangulum A G H eadem magnitudine esse, utriusvis cunei subcentrica fuerit A H; hoc est, sive per hanc, sive per illam tangentium parallelarum A L abscissi. Itaque A G unius casus ad A G alterius, ut H G hujus ad H G illius. Sicut autem rectæ A G inter se, ita in utroque casu cunei per A L abscissi, ut colligitur ex prop. 7. huj. Ergo ita quoque reciproce G H ad G H.

Apparet etiam, dato figuræ planæ centro gravitatis G, & subcentrica cunei, per alterutram tangentium parallelarum A L abscissi, dari quoque cunei, per tangentem alteram A L abscissi, subcentricam.

PROPOSITIO X.

Positis quæ in propositione præcedenti; si data recta E D *transeat per* G, *centrum gravitatis figuræ* A B C; *erit sum-*



ma quadratorum à distantiis particularum, in quas figura

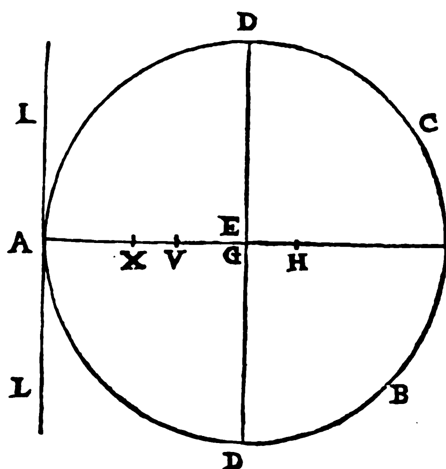
divisa intelligitur, ab recta E D, *æqualis rectangulo sol.* A G H, *multiplici secundum ipsarum particularum numerum.* De centro Oscillationis.

Hoc enim manifestum est, quum nullum tunc sit quadratum E G.

PROPOSITIO XI.

P*Ositis rursus cæteris ut in præcedentium penultima; si* D E *sit axis figuræ planæ* A B C, *in duas æquales similesque portiones eam dividens, sitque insuper* V G *distantia centri gravitatis dimidiæ figuræ* D A D *ab recta* E D, *cunei vero, super ipsam abscissi per ipsam* E D, *subcentrica* G X; *erit rectangulum* X G V *æquale rectangulo* A G H.

Est enim rectangulum X G V, multiplex secundum numerum particularum figuræ D A D, æquale quadratis omnibus perpendicularium à particulis ejusdem figuræ dimidiæ in rectam E D cadentium *. Ac proinde idem rectangulum X G V, multiplex secun- * Prop. 8. huj.



dum numerum particularum totius figuræ A B C, æquale erit quadratis perpendicularium, ab omnibus particulis figuræ hujus in rectam E D demissarum; hoc est, rectangulo A G H multiplici secundum eundem particularum numerum, ut constat ex propos. præcedenti. Unde sequitur rectangula X G V, A G H inter se æqualia esse. quod erat demonstrandum.

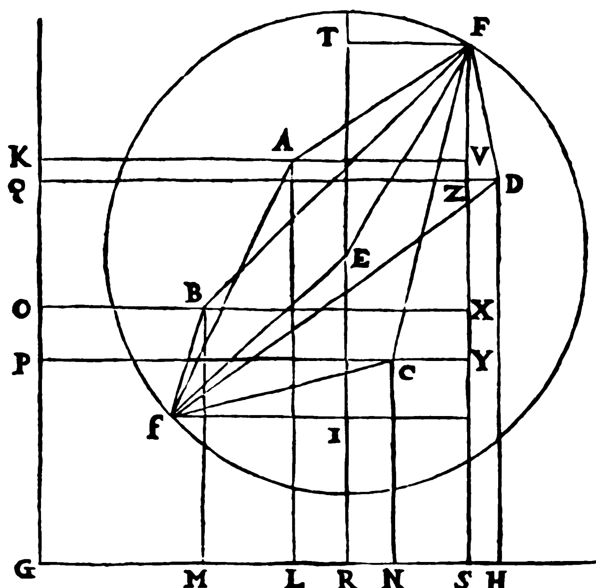
PROPOSITIO XII.

D*Atis in plano punctis quotlibet; si ex centro gravitatis eorum circulus quilibet describatur; ducantur autem ab omnibus datis punctis, ad punctum aliquod in circuli illius*

De centro Oscillationis.

circumferentia linea recta; erit summa quadratorum ab omnibus semper eidem plano æqualis.

Sint data puncta A B C D: centrumque gravitatis eorum, sive magnitudinum æqualium ab ipsis suspensarum, sit E; & centro E describatur circulus quilibet F f, in cujus circumferentia sumpto puncto aliquo, ut F, ducantur ad id, à datis punctis, rectæ A F, B F, C F, D F. Dico earum omnium quadrata, simul sumpta, æqualia esse plano cuidam dato, semperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum F sumptum fuerit.



Ducantur enim rectæ G H, G K, angulum rectum constituentes, & quarum unicuique omnia data puncta sint posita ad eandem partem. Et à singulis in utramque harum perpendiculares agantur A L, A K; B M, B O; C N, C P; D H, D Q. A centro autem gravitatis E, & à puncto F, in alterutram duarum, G H vel G K, perpendiculares E R, F S. Et item, à datis punctis, in ipsam F S perpendiculares A V, B X, C Y, D Z. Et F T perpendicularis in ipsam E R. Porro sit jam

A L ∞ *a*	A K ∞ *e*	radius E F ∞ *z*
B M ∞ *b*	B O ∞ *f*	G S ∞ *x*
C N ∞ *c*	C P ∞ *g*	
D H ∞ *d*	D Q ∞ *h*	

Quia autem E est centrum gravitatis punctorum A, B, C, D; si addantur in unum perpendiculares A L, B M, C N, D H, compositaque ex omnibus dividatur in tot partes, quot sunt data puncta; earum partium uni æqualis erit E R*. Similiterque, divisâ in toti-

* Prop. 2. huj.

dem partes summâ perpendicularium AK, BO, CP, DQ, earum uni æqualis erit perpendicularis, ducta ex E in rectam GK, sive ipsa RG*. Itaque, si summa omnium AL, BM, CN, DH, sive $a + b + c + d$ vocetur l: summa vero omnium, AK, BO, CP, DQ, sive $e + f + g + h$, vocetur m: & numerus, datorum punctorum multitudinem exprimens, dicatur θ; erit ER $\propto \frac{l}{\theta}$; & RG $\propto \frac{m}{\theta}$. Cumque GS sit x, erit RS sive FT $\propto x - \frac{m}{\theta}$; vel $\frac{m}{\theta} - x$, si GR major quam GS; & semper quadratum FT $\propto xx - 2\frac{xm}{\theta} + \frac{mm}{\theta\theta}$. quo ablato ab quadrato FE $\propto zz$, relinquetur quadratum TE $\propto zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}$. Et proinde TE $\propto \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. Erat autem ER $\propto \frac{l}{\theta}$. Itaque TR $\propto \frac{l}{\theta}$ + vel $- \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. quæ TR, brevitatis gratia, dicatur y. Colligamus jam porro summam quadratorum omnium FA, FB, FC, FD. Quadratum AF æquatur quadratis AV, VF. Est autem AV æqualis differentiæ duarum VK, AK, sive duarum SG, AK; ac proinde AV $\propto x - e$ vel $e - x$; & qu. AV $\propto xx - 2ex + ee$. VF vero æqualis est differentiæ duarum FS, VS sive duarum FS, AL; ac proinde VF $\propto y - a$ vel $a - y$; & qu. VF $\propto yy - 2ay + aa$. Additisque quadratis AV, VF, fit quadratum FA $\propto xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$. Eodemque modo invenientur quadrata reliquarum FB, FC, FD; atque omnia ordine disposita erunt hæc;

qu. FA $\propto xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$.
qu. FB $\propto xx - 2fx + ff + yy - 2by + bb$.
qu. FC $\propto xx - 2gx + gg + yy - 2cy + cc$.
qu. FD $\propto xx - 2hx + hh + yy - 2dy + dd$.

Horum vero summa; si ponamus quadrata $ee + ff + gg + hh \propto nn$; & quadrata $aa + bb, + cc + dd \propto kk$; erit ista, $\theta xx - 2mx + nn + \theta yy - 2ly + kk$. Siquidem θ erat numerus datorum punctorum ideoque & quadratorum, positumque fuerat $e + f + g + h \propto m$, & $a + b + c + d \propto l$.

In ista vero summa, si in terminis θyy & $2ly$, pro y, ponatur id cujus loco positum erat, nempe $\frac{l}{\theta}$ + vel $- \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$, fiet $+\theta yy \propto \frac{ll}{\theta} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx + 2zm - \frac{mm}{\theta}$.
& $-2ly \propto -2\frac{ll}{\theta} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.
vel $+\theta yy \propto \frac{ll}{\theta} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx + 2zm - \frac{mm}{\theta}$.
& $-2ly \propto -2\frac{ll}{\theta} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.

Ac proinde, utroque casu, pro $\theta yy - 2ly$ habebitur $- \frac{ll}{\theta} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$. Quò appositis reliquis quantitatibus, summa prædi-

De centro Oscillationis.

* Prop. 2. huj.

cta contentis, $\theta\, xx - 2xm + nn + kk$, fiet tota summa, nempe quadratorum FA, FB, FC, FD, $\infty\ \theta\, zz + nn + kk - \frac{mm\,ll}{\theta}$. Quod apparet esse planum datum, cum hæ quantitates omnes datæ sint; semperque idem reperiri, ubicunque in circunferentia sumptum fuerit punctum F. quod erat demonstrandum.

Quod si puncta data diversas gravitates habere ponantur, invicem commensurabiles, ut si punctum A ponderet ut 2, B ut 3, C ut 4, D ut 7, eorumque reperto gravitatis centro, circulus rursus describatur, ad cujus circumferentiæ punctum, à datis punctis rectæ ducantur, ac singularum quadrata multiplicia sumantur secundum numerum ponderis puncti sui; ut quadratum AF duplum, BF triplum, CF quadruplum, DF septuplum; dico rursus summam omnium æqualem fore spatio dato, semperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum sumptum fuerit. Patet enim hoc ex præcedenti demonstratione, si imaginemur puncta ipsa multiplicia secundum numeros attributæ cuique gravitatis; quasi nempe in A duo puncta conjuncta sint, in B tria, in C quatuor, in D septem, atque illa omnia æqualiter gravia.

PROPOSITIO XIII.

Si figura plana, vel linea in plano existens, aliter atque aliter suspendatur à punctis, quæ, in eodem plano accepta, æqualiter à centro gravitatis suæ distent; agitata motu in latus, sibi ipsi isochrona est.

Sit figura plana, vel linea in plano existens ABC, cujus centrum gravitatis D. quo eodem centro, circumferentia circuli in eodem plano describatur, ECF. Dico, si à quovis in illa puncto, ut E, C, vel G, suspensa figura agitetur in latus; sibi ipsi, sive eidem pendulo simplici, isochronam esse.

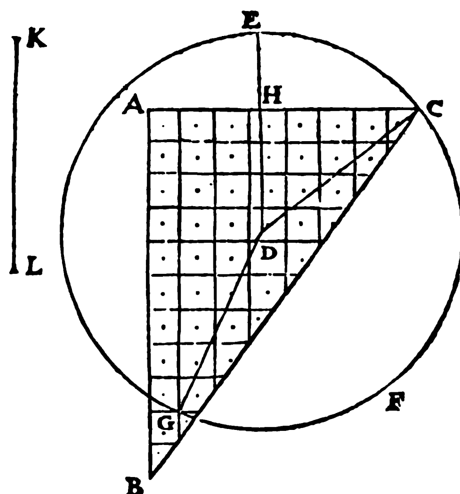
Sit prima suspensio ex E puncto, quando autem est extra figuram, ut hic, putandum est lineam EH, ex qua figura pendet, rigidam esse, atque immobiliter ipsi affixam.

Intelligatur figura ABC divisa in particulas minimas æquales, à quarum omnium centris gravitatis, ad punctum E, rectæ ductæ sint; quas quidem manifestum est, quum moveatur figura motu in latus, esse ad axem agitationis perpendiculares. Harum igitur omnium perpendicularium quadrata, divisa per rectam ED, multiplicem secundum numerum particularum in quas figura divisa est, efficiunt longitudinem penduli simplicis, figuræ isochroni *, quæ

* Prop. 6 huj.

quæ sit K L. Suspensâ autem figurâ ex puncto G, rursus longitudo penduli simplicis isochroni invenitur, dividendo quadrata omnia linearum, quæ à particulis figuræ ducuntur ad punctum G, per rectam G D, multiplicem secundum earundem particularum numerum *. Quum igitur puncta G & E sint in circunferentia descripta centro D, quod est centrum gravitatis figuræ A B C, sive centrum

* Prop. 6. huj.



gravitatis punctorum omnium, quæ centra sunt particularum figuræ æqualium; erit proinde summa quadratorum à lineis, quæ à dictis particulis ad punctum G ducuntur, æqualis summæ quadratorum à lineis quæ ab iisdem particulis ducuntur ad punctum E *. Hæ vero quadratorum summæ, utraque suspensione, applicantur ad magnitudines æquales: quippe, in suspensione ex E, ad rectam E D, multiplicem secundum numerum omnium particularum; in suspensione autem ex G, ad rectam D G, multiplicem secundum earundem particularum numerum. Ergo patet, ex applicatione hac posteriori, quum nempe suspensio est ex G, fieri longitudinem penduli isochroni eandem atque ex applicatione priori, hoc est, eandem ipsi K L.

* Prop. præced.

Eodem modo, si ex C, vel alio quovis puncto circunferentiæ E C F, figura suspendatur, eidem pendulo K L isochrona esse probabitur. Itaque constat propositum.

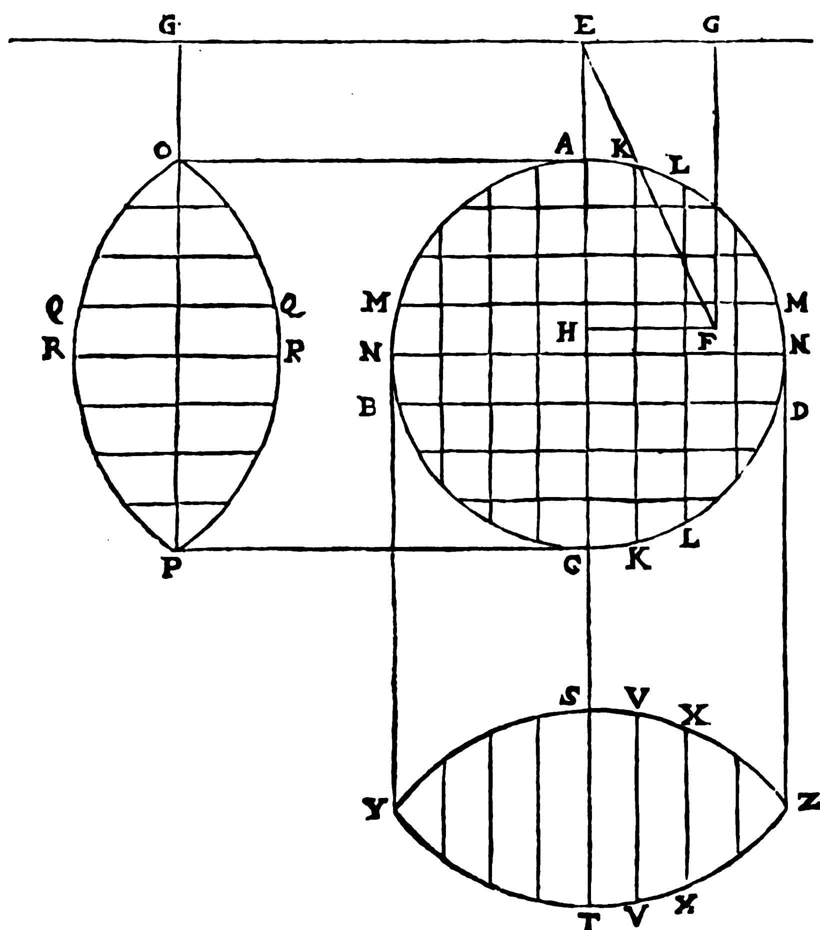
PROPOSITIO XIV.

Datâ figurâ solidâ, & lineâ rectâ interminatâ, quæ vel extra figuram cadat, vel per eam transeat; divisâque

De centro Oscillationis.

figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, à quibus omnibus ad datam rectam perpendiculares ductæ intelligantur; invenire summam omnium quæ ab ipsis fiunt quadratorum, sive planum, cujus multiplex secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summæ æquale sit.

Sit data figura solida A B C D, & linea recta quæ, per punctum E transiens, ad planum hujus paginæ erecta intelligatur: quæque vel secet figuram, vel tota extra cadat. Intellectoque, à singulis particulis minimis æqualibus, solidum A B C D constituentibus, velut F, rectas duci perpendiculares in datam rectam per E, quemadmodum hic F E, oporteat omnium quadratorum F E summam invenire.



Secetur figura plano E A C, per dictam datam lineam & per centrum gravitatis figuræ ducto. Item aliud planum intelligatur per eandem lineam datam, perque E G, quæ ipsi est ad angulos rectos.

Constat jam, quadratum rectæ cujusque, quæ à particula di-

ctarum aliqua, ad lineam datam per E perpendicularis ducitur, sicut F E, æquari quadratis duarum F G, F H, quæ, ab eadem particula, in plana per E G & E C ante dicta, perpendiculares aguntur *. Quare, si cognoscere possimus summam quadratorum, quæ fiunt ab omnibus perpendicularibus, quæ à particulis universis cadunt in plana dicta per E G & per E C; habebimus etiam huic æqualem summam quadratorum à perpendicularibus, quæ ab universis iisdem particulis cadunt in rectam datam per E punctum.

De centro Oscillationis.

* 47. lib. 1. Eucl.

Illa vero prior quadratorum summa colligetur hoc modo. Ponatur primò figuram planam dari O Q P, ad latus figuræ solidæ A B C D, ejusdem cum ipsa altitudinis, quæque sit ejusmodi, ut secta lineis rectis Q Q, R R, quæ respondeant planis figuram solidam A B C D secantibus M M, N N, & his parallelis; eadem sit dictarum linearum inter se, quæ & planorum horum ratio, si nempe sumantur utrinque quæ in ordine sibi respondent. Vt si linea R R sit ad Q Q quemadmodum planum N N ad M M. Quod si igitur figura plana O Q P, in totidem particulas minimas æquales divisa intelligatur, quot intelliguntur in solido A B C D, erunt etiam in unoquoque segmento figuræ planæ, velut Q Q R R, tot numero particulæ, quot sunt in figuræ solidæ segmento M M N N, isti segmento respondente; ac proinde & summa quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ O Q P in planum E G, æquabitur summæ quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ solidæ, in idem planum E G productis. Illa autem quadratorum summa data erit, si dentur in figura O Q P, cuneoque illius, quæ propos. 9. huj. requiri diximus. Ergo his datis, dabitur quoque summa quadratorum, à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, ducuntur in planum E G.

Ponatur nunc alia item figura plana S Y T Z, ejusdem cum solido A B C D latitudinis, hoc est, quam includant plana B Y, D Z solidum contingentia, ac parallela plano E A C, quæque sit ejusmodi, ut, secta lineis rectis V V, X X &c. quæ respondeant planis figuram A B C D secantibus, K K, L L, & his parallelis, faciat eandem inter se rationem linearum harum atque illorum planorum, si sumantur quæ sibi mutuo respondent. Itaque rursus quadrata simul omnia perpendicularium, à particulis figuræ S Y T Z in rectam S T cadentium, æqualia erunt quadratis omnibus perpendicularium quæ, à particulis solidi A B C D, ducuntur in planum A C. Illorum autem summa quadratorum data erit, si detur distantia centri gravitatis figuræ S Y T Z ab recta B Y vel D Z; nec non distantia indidem centri gra-

vitatis cunei sui abscissi plano per eandem rectam *. Vel, figura S Y T Z ordinata existente, ut S T sit axis ejus, eadem quadratorum summa dabitur, si detur distantia centri gravitatis figuræ dimidiæ S Z T ab axe S T, item centri gravitatis cunei, super eadem dimidia figura, abscissi plano per axem ducto *. Ergo, his datis, dabitur quoque summa quadratorum à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, ductæ intelliguntur in planum E A C. Invenimus autem & summam quadratorum, à perpendicularibus omnibus in planum per E G ductis. Ergo & aggregatum utriusque summæ habebitur, hoc est, per superius ostensa, summa quadratorum perpendicularium quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, cadunt in rectam datam per E transeuntem, & ad paginæ hujus planum erectam. quod erat faciendum.

* Prop. 9. huj.

* Prop. 11. huj.

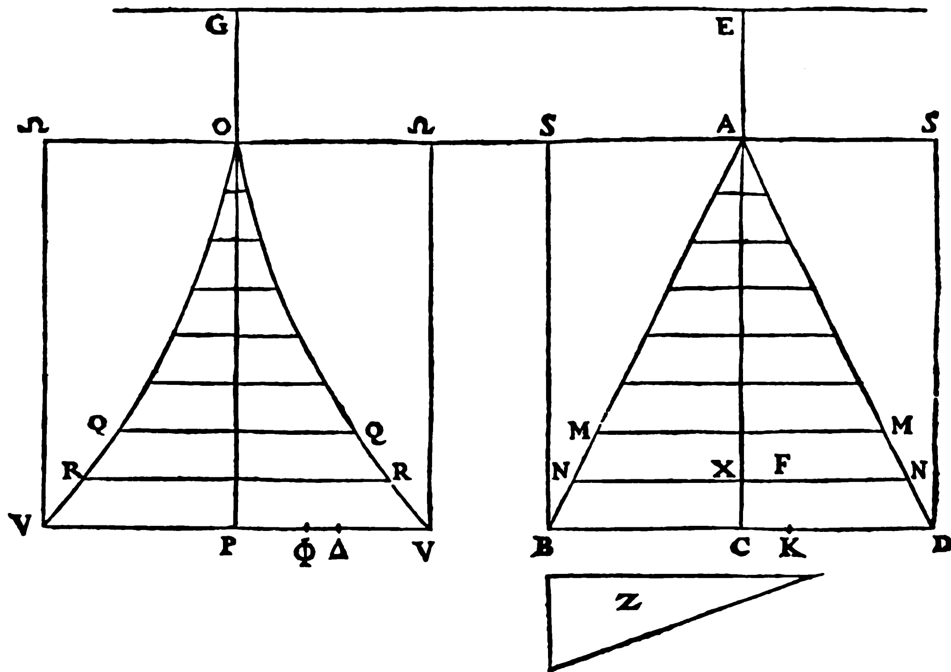
PROPOSITIO XV.

Iisdem positis, si solidum A B C D *sit ejusmodi, ut figura plana* S Y T Z, *ipsi proportionalis, non habeat notam distantiam centri gravitatis à tangentibus* B Y *vel* D Z, *vel, ut subcentrica cunei super ipsa abscissi, plano per easdem* B Y *vel* D Z, *ignoretur; in figura tamen proportionali, quæ à latere est,* O Q P, *detur distantia* Φ P, *qua centrum gravitatis figuræ dimidiæ* O P V *abest ab axe* O P; *licebit hinc invenire summam quadratorum à distantiis particularum solidi* A B C D *à plano* E C. *Oportet autem ut sectiones omnes,* N N, M M, *sint plana similia; utque per omnium centra gravitatis transeat planum* E C; *quemadmodum in prismate, pyramide, cono, conoidibus, multisque aliis figuris contingit. Atque eorum planorum distantias centri gravitatis, super tangentibus axi oscillationis parallelis, datas esse necesse est; uti & subcentricas cuneorum, qui super ipsis abscinduntur, ductis planis per easdem tangentes.*

Veluti, si maxima dictarum sectionum sit B D, & in B intelligatur recta parallela axi E, hoc est, erecta ad planum quod hic conspicitur, oportet datam esse distantiam centri gr. sectionis B D à dicta linea in B, quæ sit B C; itemque subcentricam cunei, super sectione B D abscissi, plano ducto per eandem lineam in B, quæ subcentrica sit B K.

Etenim his datis, divisâque P V bifariam in Δ, si fiat sicut Δ P ad

P Φ, ita rectangulum B C K ad spatium quoddam Z; dico hoc ipsum, multiplex per numerum particularum solidi A B C D, æquari summæ quæsitæ quadratorum, à distantiis earundem particularum à plano E C. De centro Oscillationis.



Quadrata enim à distantiis particularum planæ sectionis B D, à plano E C, quod per centrum gravitatis suæ transit; sive quadrata à distantiis particularum solidarum segmenti B N N D à plano eodem, æquari constat rectangulo B C K, multiplici per numerum dictarum particularum *. Similiter, si planæ sectionis N N distantia centri gravitatis, ab recta quæ in N intelligitur axi E parallela, sit N X; subcentrica vero cunei super ipsa abscissi, plano per eandem rectam, sit N F; erunt quadrata à distantiis particularum planarum sectionis N N à plano E C; sive quadrata à distantiis particularum solidarum segmenti N M M N, à plano eodem, æqualia rectangulo N X F, multiplici per numerum particularum ipsarum sectionis N N, vel segmenti N M M N. Est autem B D divisa similiter in C & K, atque N N in X & F. Ergo rectangulum B C K ad rectangulum N X F, sicut quadratum B D ad quadratum N N. * Prop. 8. huj.

Est autem & numerus particularum sectionis B D, ad numerum particularum sectionis N N, sicut sectiones ipsæ; hoc est, sicut quadratum B D ad quadratum N N. Itaque rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum sectionis B D, ad rectangulum N X F, multiplex per numerum particularum sectionis N N, dupli-

De centro Oscillationis.

catam habebit rationem quadrati B D ad quadratum N N; hoc est, eam quam quadratum V V ad quadratum R R, in figura proportionali. Erit igitur & dicta prior summa quadratorum, à distantiis particularum segmenti B N N D à plano E C, ad summam alteram quadratorum, à distantiis particularum segmenti N M M N, ut qu. V V ad qu. R R. Eademque ratione ostendetur, summas quadratorum à distantiis particularum in reliquis segmentis solidi A B C D, esse inter se in ratione quadratorum quæ fiunt à rectis in figura O V V, quæ basi cujusque segmenti respondent. Quare summa quadratorum, à distantiis particularum omnium segmentorum solidi A B C D à plano E C, erit ad summam quadratorum, à distantiis particularum segmentorum totidem, maximo segmento æqualium, hoc est, cylindri vel prismatis B D S S, eandem cum solido A B C D basin altitudinemque habentis, sicut quadrata omnia rectarum V V, R R, Q Q, &c. ad quadrata totidem maximo V V æqualia, hoc est, sicut solidum rotundum O V V circa axem O P, ad cylindrum V V Ω Ω, qui basin & altitudinem habeat eandem. Hanc vero rationem solidi O V V ad cylindrum V V Ω Ω, componi constat ex ratione planorum quorum conversione generantur, hoc est, ex ratione plani O P V, ad rectangulum P Ω, & ex ratione distantiarum quibus horum planorum centra gravitatis absunt ab axe O P; hoc est, & ex ratione P Φ ad P Δ. Et prior quidem harum rationum, nempe plani O P V ad rectangulum P Ω, eadem est quæ solidi A B C D ad cylindrum vel prisma B D S S, hoc est, eadem quæ numeri particularum solidi A B C D, ad numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S. Altera vero ratio, nempe P Φ ad P Δ, est eadem, ex constructione, quæ spatii Z ad rectangulum B C K. Habebit itaque dicta summa quadratorum, à distantiis omnium particularum solidi A B C D à plano E C, ad summam quadratorum, à distantiis omnium particularum cylindri vel prismatis B D S S ab eodem plano, rationem eam quæ componitur ex ratione numeri particularum solidi A B C D, ad numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S, & ex ratione spatii Z ad rectangulum B C K: hoc est, rationem quam habet rectangulum Z, multiplex per numerum particularum solidi A B C D, ad rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S. Atqui quarta harum magnitudinum æqualis est secundæ; nempe rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S, æquale summæ quadratorum, à distantiis particularum ejusdem prismatis vel cylindri B D S S à plano E C; siquidem rectangulum idem B C K, multiplex

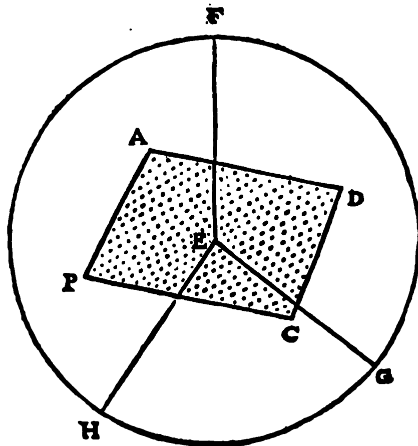
per numerum particularum ſegmenti B N N D, æquatur quadratis diſtantiarum particularum ejuſdem ſegmenti à plano E C*. Ergo & tertia primæ æquabitur; nempe planum Z, multiplex per numerum particularum ſolidi A B C D, ſummæ quadratorum, à diſtantiis particularum ſolidi ejuſdem A B C D à plano E C*. quod erat demonſtrandum.

De centro Oscillationis.
* Prop. 8. huj.
* Prop. 14. lib. 5. Eucl.

Notandum vero, quando ſolidum A B D rotundum eſt circa axem A C, fieri ſemper rectangulum B C K æquale quartæ parti quadrati B C; quoniam ſubcentrica cunei, abſciſſi ſuper circulo B D, plano per tangentem in B, nempe recta B K, æquatur $\frac{1}{4}$ radii B C. Vnde, ſi P V æqualis poſita ſit B C, ſequitur, faciendo ut P Δ ad P Φ ita rectangulum B C K, hoc eſt, $\frac{1}{4}$ quadrati B C, hoc eſt, qu. P Δ ad planum aliud Z, fore hoc rectangulo Δ P Φ æquale. Ac proinde tunc ipſum rectangulum Δ P Φ, multiplex ſecundum numerum particularum ſolidi A B D, æquari ſummæ quæſitæ quadratorum à perpendicularibus omnibus, quæ à particulis iiſdem cadunt in planum E C.

PROPOSITIO XVI.

Figura quævis, ſive linea fuerit, ſive ſuperficies, ſive ſolidum; ſi aliter atque aliter ſuſpendatur, agiteturque ſuper axibus inter ſe parallelis, quique à centro gravitatis figuræ æqualiter diſtent, ſibi ipſi iſochrona eſt.



Proponatur magnitudo quævis, cujus centrum gravitatis E punctum, ſitque primo ſuſpenſa ab axe, qui per F intelligitur hujus paginæ plano ad angulos rectos. Itaque idem planum erit & planum oſcillationis. In quo ſi centro E, radio E F, deſcribatur circumferentia F H G, ſumptoque in illa puncto quovis, ut H, magnitudo ſecundò ſuſpendi intelligatur ab axe in hoc puncto infixo, atque agitari, manente eodem oſcillationis plano. Dico iſochronam fore ſibi ipſi agitatæ circa axem in F.

Intelligatur enim dividi magnitudo proposita in particulas minimas æquales. Itaque, quia in utraque illa suspensione idem manet oscillationis planum, respectu partium magnitudinis; manifestum est, si ab omnibus particulis, in quas divisa est magnitudo, perpendiculares cadere concipiantur in dictum oscillationis planum, illas utraque suspensione occurrere ipsi in punctis iisdem. Sint autem hæc puncta ea quæ apparent in spatio A B C D.

Quum igitur E sit centrum gravitatis magnitudinis propositæ, ipsaque proinde circa axem, qui per E punctum erectus est ad planum A B C D, quovis situ æquilibrium servet; facile perspicitur, quod si punctis omnibus ante dictis, quæ in spatio A B C D signantur, æqualis gravitas tribuatur, eorum quoque omnium centrum gravitatis futurum est punctum E. Quod si vero, ut fieri potest, in puncta aliqua plures perpendiculares coincidant, illa puncta quasi toties geminata intelligenda sunt, gravitatesque toties multiplices accipiendæ. Atque ita consideratorum, patet rursus centrum gravitatis esse E punctum.

Porro summam quadratorum ab rectis, quæ ducuntur à dictis punctis omnibus ad punctum F, eandem esse patet cum summa quadratorum ab iis rectis, quæ à singulis particulis magnitudinis propositæ ducuntur perpendiculares in axem oscillationis per F transeuntem; quippe cum lineæ ipsæ, quarum quadrata intelliguntur, utrobique eandem habeant longitudinem. Similiter etiam, cum suspensio est ex axe per H, patet summam quadratorum ab rectis, quæ ab omnibus punctis, in spatio A B C D signatis, ducuntur ad punctum H, eandem esse cum summa quadratorum, ab iis quæ, à particulis omnibus magnitudinis propositæ, ducuntur perpendiculares in axem oscillationis per H transeuntem. Ergo utroque casu, si summa quadratorum ab rectis quæ, à punctis omnibus prædictis, ducuntur ad puncta F vel H, dividatur per rectas E F vel E H, multiplices secundum numerum particularum in quas magnitudo proposita divisa intelligitur, orietur ex applicatione hac longitudo penduli simplicis, quod magnitudini suspensæ ex F vel H isochronum sit. Est autem summa quadratorum utroque casu æqualis*; & rectæ quoque E F, E H, inter se æquales; & particularum idem numerus. Ergo, quum & applicatæ quantitates, & quibus illæ applicantur, utrobique æquales sint, etiam longitudines ex applicatione ortæ æquales erunt, hoc est, longitudines pendulorum isochronorum magnitudini propositæ suspensæ ex F vel ex H. Quare constat propositum.

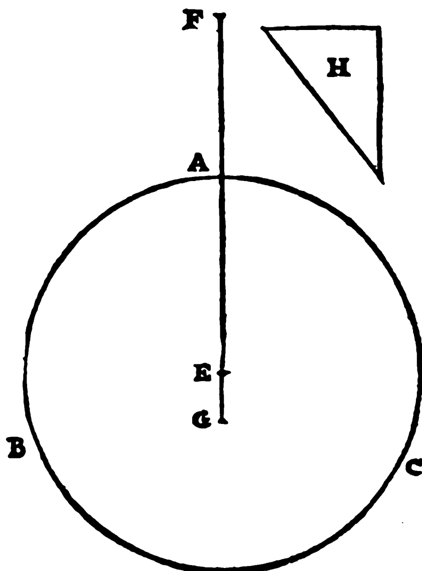
* Prop. 11. huj.

PROP.

PROPOSITIO XVII.

Dato plano, cujus multiplex per numerum particularum, in quas suspensa figura divisa intelligitur, æquetur quadratis omnium distantiarum ab axe oscillationis; si illud applicetur ad rectam, æqualem distantiæ inter axem oscillationis & centrum gravitatis suspensæ magnitudinis, orietur longitudo penduli simplicis ipsi isochroni.

Sit figura A B C, cujus centrum gravitatis E, suspensa ab axe qui, per F punctum ad planum quod conspicitur, erectus sit. Ponendoque divisam figuram in particulas minimas æquales, à quibus omnibus, in dictum axem, perpendiculares cadere intelligantur: esto, per superius ostensa, inventum planum H, cujus multiplex per numerum dictarum particularum, æquetur quadratis omnibus dictarum perpendicularium. Applicatoque plano H ad rectam F E, fiat longitudo F G. Dico hanc esse longitudinem penduli simplicis, isochronas oscillationes habentis magnitudini A B C, agitatæ circa axem per F.



Quia enim summa quadratorum, à distantiis ab axe F, applicata ad distantiam F E, multiplicem secundum partium numerum, facit longitudinem penduli simplicis isochroni *. Isti vero quadratorum summæ æquale ponitur planum H, multiplex per eundem particularum numerum. Ergo & planum H, multiplex per eundem particularum numerum, si applicetur ad distantiam F E, multiplicem

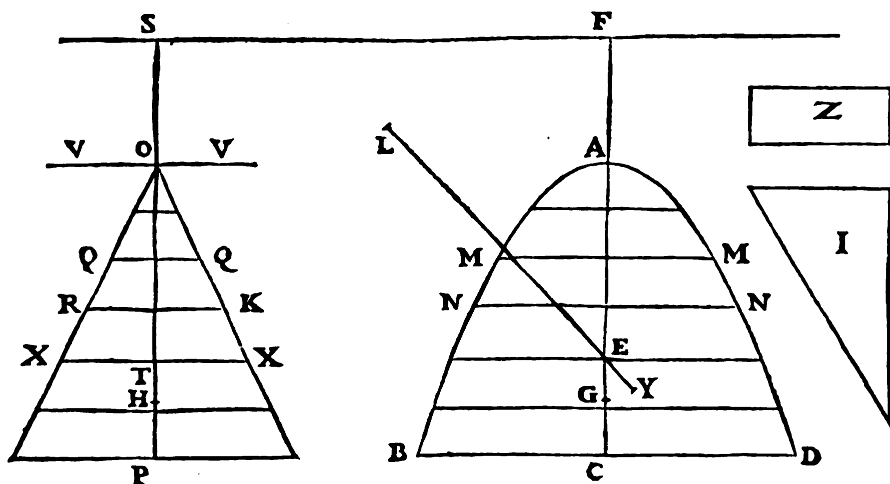
* Prop. 6. huj.

ſecundum particularum numerum; ſive, omiſſa communi multiplicitate, ſi planum H applicetur ad diſtantiam F E; orietur quoque longitudo penduli ſimplicis iſochroni. Quam proinde ipſam longitudinem F G eſſe conſtat. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVIII.

SI ſpatium planum, cujus multiplex ſecundum numerum particularum ſuſpenſæ magnitudinis, æquetur quadratis diſtantiarum ab axe gravitatis, axi oſcillationis parallelo; id, inquam, ſpatium ſi applicetur ad rectam, æqualem diſtantiæ inter utrumque dictorum axium, orietur recta æqualis intervallo, quo centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis ejuſdem magnitudinis.

Eſto magnitudo A B C D, cujus centrum gravitatis E; quæque ſuſpenſa ab axe, qui per punctum F ad planum hujus paginæ erectus intelligitur, habeat centrum oſcillationis G. Porro axi per F intelligatur axis alius, per centrum gravitatis E tranſiens, parallelus.



Diviſaque magnitudine cogitatu in particulas minimas æquales, ſit quadratis diſtantiarum, ab axe dicto per E, æquale planum I, multiplex nempe ſecundum numerum dictarum particularum; applicatoque plano I ad diſtantiam F E, fiat recta quædam. Dico eam æqualem eſſe intervallo E G, quo centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis magnitudinis A B C D.

Ut enim univerſali demonſtratione quod propoſitum eſt comprehendamus: intelligatur plana figura, magnitudini A B C D analoga, ad latus adpoſita, O Q P; quæ nempe, ſecta planis horizontalibus iiſdem cum magnitudine A B C D, habeat ſegmenta inter-

cepta inter bina quæque plana, in eadem inter se ratione cum segmentis dictæ magnitudinis, quæ ipsis respondent; sintque segmenta singula figuræ O Q P, divisa in tot particulas æquales, quot continentur segmentis ipsis respondentibus in figura A B C D. Hæc autem intelligi possunt fieri, qualiscunque fuerit magnitudo A B C D, sive linea, sive superficies, sive solidum. Semper vero centrum gravitatis figuræ O Q P, quod sit T, eadem altitudine esse manifestum est cum centro gravitatis magnitudinis A B C D; ideoque, si planum horizontale, per F ductum, secet lineam centri figuræ O Q P, velut hic in S, æquales esse distantias S T, F E.

Porro autem constat quadrata distantiarum, ab axe oscillationis F, applicata ad distantiam F E, multiplicem secundum numerum particularum, efficere longitudinem penduli isochroni *; quæ longitudo posita fuit F G. Illorum vero quadratorum summam, æqualem esse perspicuum est, quadratis distantiarum à plano horizontali per F, unà cum quadratis distantiarum à plano verticali F E, per axem F & centrum gravitatis E ducto *. Atqui quadrata distantiarum magnitudinis A B C D à plano horizontali per F, æquantur quadratis distantiarum figuræ O Q P ab recta S F. Quæ quadrata (si O sit punctum supremum figuræ O Q P, & H centrum gravitatis cunei super ipsa abscissi, plano per rectam O V, parallelam S F) æqualia sunt rectangulo O T H & quadrato S T, multiplicibus secundum numerum particularum dictæ figuræ *, sive magnitudinis A B C D. Quadrata vero distantiarum magnitudinis A B C D à plano F E, quantumcumque axis oscillationis F distet à centro gravitatis E, semper eadem sunt: quæ proinde putemus æquari spatio Z, multiplici secundum numerum particularum magnitudinis A B C D.

* Prop. 6. huj.

* Prop. 47. lib. 1. Eucl.

* Prop. 9. huj.

Itaque quoniam quadrata distantiarum magnitudinis A B C D, ab axe oscillationis F, æquantur istis, quadrato nimirum S T, rectangulo O T H, & plano Z, multiplicibus per numerum particularum ejusdem magnitudinis; si applicentur hæc omnia ad distantiam F E sive S T, orietur longitudo F G penduli isochroni magnitudini A B C D *. Sed ex applicatione quadrati S T ad latus suum S T, orietur ipsa S T, sive F E. Ergo reliqua E G est ea quæ oritur ex applicatione rectanguli O T H, & plani Z, ad eandem S T vel F E.

* Prop. 6. huj.

Quare superest ut demonstremus rectangulum O T H, cum plano Z, æquari plano I. Tunc enim constabit, etiam planum I, applicatum ad distantiam F E, efficere longitudinem ipsi E G æqualem. Illud autem sic ostendetur. Rectangulum O T H, multiplex secundum numerum particularum figuræ O Q P, sive magnitudinis A B

DE CENTRO OSCILLATIONIS. *Prop. 10. huj.

C D, æquatur quadratis distantiarum figuræ ab recta X T *, quæ per centrum gravitatis T ducitur ipsi S F parallela; ac proinde etiam quadratis distantiarum magnitudinis A B C D, à plano horizontali K K, ducto per centrum gravitatis E; cum distantiæ utrobique sint eædem. At vero planum Z, similiter multiplex, æquale positum fuit quadratis distantiarum magnitudinis A B C D à plano verticali F E. Ac patet quidem quadrata hæc distantiarum à plano F E, una cum dictis quadratis distantiarum à plano horizontali per E, æqualia esse quadratis distantiarum ab axe gravitatis per E, qui sit axi F parallelus *. Itaque rectangulum O T H una cum plano Z, multiplicia secundum numerum particularum magnitudinis A B C D, æqualia erunt quadratis distantiarum ejusdem magnitudinis à dicto axe per E. Sed & planum I, multiplex secundum eundem particularum numerum, æquale positum fuit iisdem distantiarum quadratis. Ergo planum I æquale est rectangulo O T H & plano Z simul sumptis. quod ostendendum supererat.

* Prop. 47. lib. 1. Eucl.

Hinc rursus manifestum fit, quod propositione 16 demonstratum fuit; nempe magnitudinem quamlibet, si aliter atque aliter suspendatur atque agitetur, ab axibus parallelis, qui à centro gravitatis suæ æqualiter distent, sibi ipsi isochronam esse.

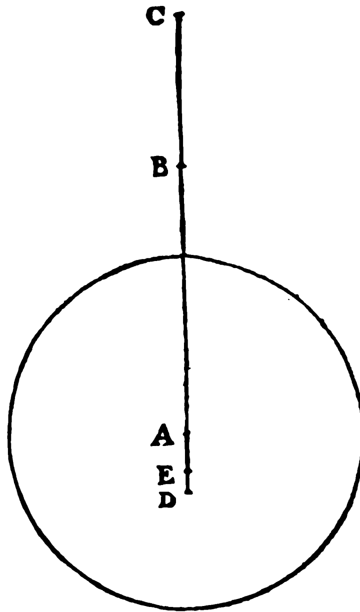
Sive enim magnitudo A B C D suspendatur ab axe F, sive ab axe L illi parallelo; patet eadem utrobique esse quadrata distantiarum ab axe per E, qui sit axibus F vel L parallelus. Unde & planum I, cujus multiplex, secundum numerum particularum, æquatur quadratorum summæ, utroque casu idem erit. Hoc vero planum, applicatum ad distantiam centri gravitatis ab axe oscillationis, quæ utroque casu eadem ponitur, efficit distantiam qua centrum oscillationis inferius est centro gravitatis; Ergo etiam hæc distantia utroque casu eadem erit. Velut si, facta suspensione ex L, fuerit dicta distantia E Y, erit ipsa æqualis E G; & tota Y L æqualis G F; adeoque, in suspensione utraque, idem pendulum simplex isochronum fit magnitudini A B C D.

PROPOSITIO XIX.

SI magnitudo eadem, nunc brevius nunc longius suspensa, agitetur; erunt, sicut distantia axium oscillationis à centro gravitatis inter se, ita contraria ratione distantia centrorum oscillationis ab eodem gravitatis centro.

Sit magnitudo, cujus centrum gravitatis A, suspensa primum atque agitata ab axe in B, deinde vero ab axe in C; sitque in prima

suspensione centrum oscillationis D, in posteriori vero centrum oscillationis E. Dico esse ut B A ad C A ita E A ad D A. *De centro Oscillationis.*



Quum enim, in suspensione ex B, efficiatur distantia A D, qua nempe centrum oscillationis inferius est centro gravitatis, applicando ad distantiam B A spatium quoddam, cujus multiplex secundum numerum particularum minimarum æqualium, in quas magnitudo divisa intelligitur, æquatur quadratis distantiarum ab axe per A, parallelo axi in B *; erit proinde rectangulum B A D dicto spatio æquale. Item, in suspensione ex C, quum fiat distantia A E, applicando idem dictum spatium ad distantiam C A; erit & rectangulum C A E eidem spatio æquale. Itaque æqualia inter se rectangula B A D, C A E; ac proinde ratio B A ad C A eadem quæ A E ad A D. quod erat demonstrandum.

* Prop. præced.

Hinc patet, dato pendulo simplici, quod magnitudini suspensæ isochronum sit in una suspensione, datoque ejus centro gravitatis; etiam in alia omni suspensione, longiori vel breviori, dummodo idem maneat planum oscillationis, longitudinem penduli isochroni datam esse.

PROPOSITIO XX.

Centrum Oscillationis & punctum suspensionis inter se convertuntur.

In figura superiori, quia, posita suspensione ex B, centrum oscillationis est D; etiam invertendo omnia, ponendoque suspen-

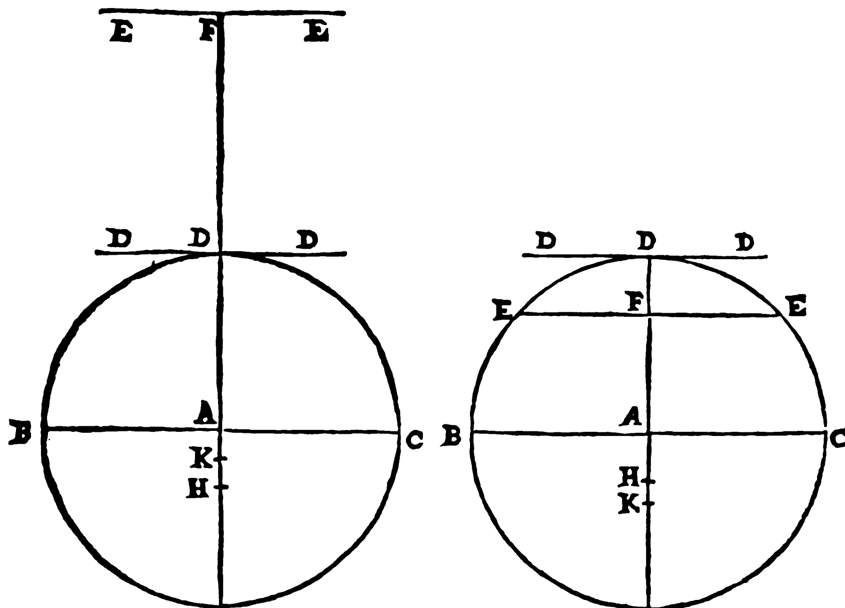
De centro Oscillationis.

ſionem ex D, erit tunc centrum oſcillationis B. Hoc enim ex ipſa propoſitione præcedenti manifeſtum eſt.

PROPOSITIO XXI.

Quomodo in figuris planis centra oſcillationis inveniantur.

Intellectis quæ hactenus demonſtrata ſunt, facile jam erit in plerîſque figuris, quæ in Geometria conſiderari conſueverunt, definire oſcillationis centra. Atque ut de planis figuris primum dicamus; duplicem in iis oſcillationis motum ſupra definivimus; nempe, vel circa axem in eodem cum figura plano jacentem, vel circa eum qui ad figuræ planum erectus ſit. Quorum priorem vocavimus agitationem in planum, alterum agitationem in latus.



Quod ſi priore modo agitetur, nempe circa axem in eodem plano jacentem, ſicut figura B C D circa axem E F; hic, ſi cuneus ſuper figura intelligatur abſciſſus, plano quod ita ſecet planum figuræ, ut interſectio, quæ hic eſt D D, ſit parallela oſcillationis axi; deturque diſtantia centri gravitatis figuræ ab hac interſectione, ut hic A D; itemque ſubcentrica cunei dicti ſuper eadem interſectione, quæ hic ſit D H. Habebitur centrum oſcillationis K, figuræ B D C, applicando rectangulum D A H ad diſtantiam F A; quoniam ex applicatione hac orietur diſtantia A K, qua centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis. Eſt enim rectangulum D A H, multiplex ſecundum numerum particularum figuræ B C D, æquale quadratis diſtantiarum ab recta B A C, quæ per centrum gravi-

tatis A parallela ducitur axi oſcillationis E F *. Quare, applicando idem rectangulum ad diſtantiam F A, orietur diſtantia A K, qua centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis A *.

* Prop.10.huj.
* Prop.18.huj.

Hinc manifeſtum eſt, ſi axis oſcillationis ſit D D, fieri centrum oſcillationis H punctum; adeoque longitudinem D H, penduli ſimplicis iſochroni figuræ B C D, eſſe tunc ipſam ſubcentricam cunei, abſciſſi plano per D D, ſuper ipſam D D. Quod unum ab aliis ante animadverſum fuit, non tamen demonſtratum.

Quomodo autem centra gravitatis cuneorum ſuper figuris planis inveniantur, perſequi non eſt inſtituti noſtri, & jam in multis nota ſunt. Velut, quod ſi figura B C D ſit circulus, erit D H æqualis $\frac{5}{8}$ diametri. Si rectangulum, erit D H ∞ $\frac{2}{3}$ diametri. Vnde & ratio apparet cur virga, ſeu linea gravitate prædita, altero capite ſuſpenſa, iſochrona ſit pendulo longitudinis ſubſeſquialteræ. Conſiderando nempe lineam ejuſmodi, ac ſi eſſet rectangulum minimæ latitudinis.

Quod ſi figura triangulum fuerit, vertice ſurſum converſo, fit D H $\frac{3}{4}$ diametri. Si deorſum, $\frac{1}{2}$ diametri.

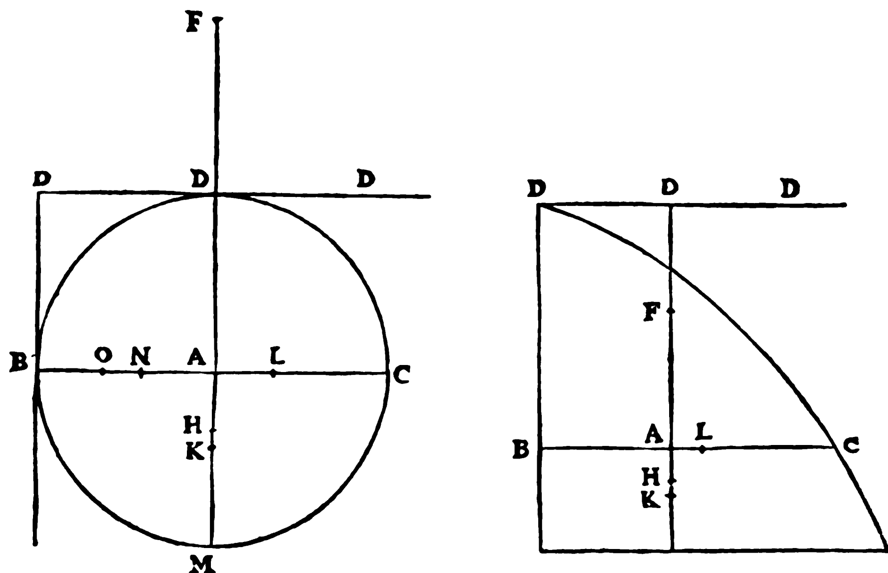
Quod autem propoſitione 16 demonſtratum fuit, id ad hujuſmodi figuræ planæ motum ita pertinere ſciendum. Nempe, ſi aliam atque aliam poſitionem demus figuræ B C D, invertendo eam circa axem B A C, ut vel horizonti parallela jaceat, vel oblique inclinetur, manente eodem agitationis axe F E, etiam longitudo penduli iſochroni F K eadem manebit. Hoc enim ex propoſitione illa manifeſtum eſt.

Porro quando figura plana, circa axem ad planum figuræ erectum, agitatur; quam vocavimus agitationem in latus; velut ſi figura B C D moveatur circa axem, qui per punctum F intelligitur ad planum D B C erectus; hic jam præter cuneum ſuper figura, qui abſcinditur plano ducto per D D, tangentem figuram in puncto ſummo, alter quoque conſiderandus cuneus, qui abſcinditur plano per B D, tangentem figuram in latere, quæque tangenti D D ſit ad rectos angulos. Oportetque dari, præter figuræ centrum gravitatis A, ſubcentricamque H D cunei prioris, etiam ſubcentricam L B cunei poſterioris. Ita enim nota erunt rectangula D A H, B A L, quæ ſimul ſumpta faciunt hic ſpatium applicandum, quod deinceps etiam Rectangulum oſcillationis vocabitur. Quod nempe, applicatum ad diſtantiam F A, dabit diſtantiam A K, qua centrum oſcillationis K inferius eſt centro gravitatis A.

Si vero F A ſit axis figuræ B C D, poteſt, pro cuneo abſciſſo per

B D ſuper figura tota, adhiberi cuneus ſuper figura dimidia D B M abſciſſus plano per D M. Nam, ſi cunei hujus ſubcentrica ſuper D M ſit O A, diſtantia vero centri gr. figuræ planæ D B M ab eadem D M ſit N A, æquale eſſe conſtat rectangulum O A N rectangulo B A L *. Itaque rectangulum O A N, additum rectangulo D A H, conſtituet quoque planum applicandum ad diſtantiam F A, ut fiat diſtantia A K.

* Prop. 11. huj.



Et horum quidem manifeſta eſt demonſtratio ex præcedentibus, quippe cum rectangula D A H, B A L, vel D A H, O A N, multiplicia ſecundum numerum particularum figuræ, æqualia ſint quadratis diſtantiarum à centro gravitatis A; ſive, quod idem hic eſt, ab axe gravitatis axi oſcillationis parallelo; ac proinde rectangula dicta, ad diſtantiam F A applicata, efficiant longitudinem intervalli A K *.

* Prop. 18. huj.

Centrum Oſcillationis Circuli.

Et in circulo quidem rectangula D A H, B A L, inter ſe æqualia eſſe liquet, ſimulque efficere ſemiſſem quadrati à ſemidiametro. Unde, ſi fiat ut F A ad ſemidiametrum A B, ita hæc ad aliam, ejus dimidium erit diſtantia A K, à centro gravitatis ad centrum oſcillationis. Si igitur circulus ab axe D, in circumferentia ſumpto, agitetur, erit D K æqualis tribus quartis diametri D M.

Ad hunc modum & in ſequentibus figuris planis centra oſcillationis quæſivimus, quæ ſimpliciter adſcripſiſſe ſufficiet. Nempe,

Centrum

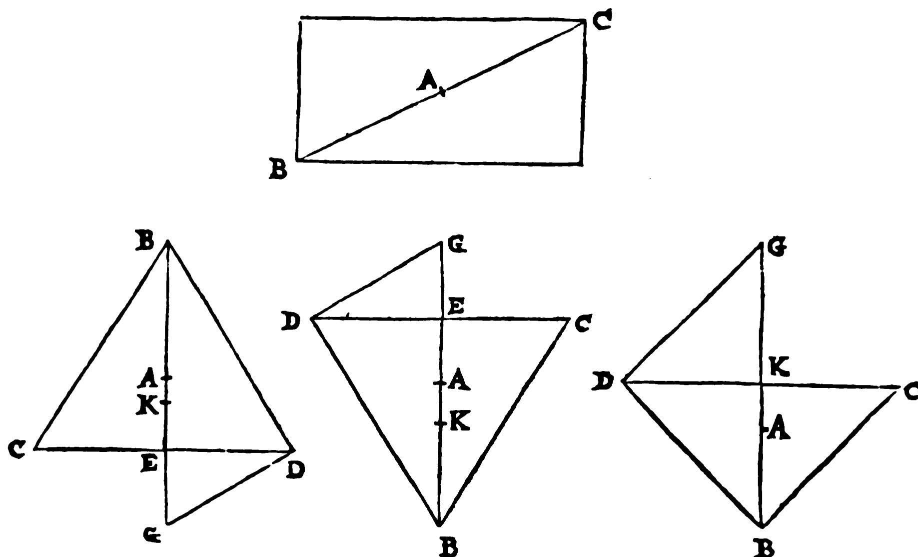
Centrum oscillationis Rectanguli.

In rectangulo omni, ut C B, ſpatium applicandum, ſive rectangulum oſcillationis, invenitur æquale tertiæ parti quadrati à ſemidiagonio A C. Vnde ſequitur, ſi rectangulum ab aliquo angulorum ſuſpendatur, motuque hoc laterali agitetur, pendulum illi iſochronum eſſe $\frac{2}{3}$ diagonii totius.

Centrum oscillationis Trianguli iſoſcelis.

In triangulo iſoſcele, cujuſmodi C B D, ſpatium applicandum æquatur parti decimæ octavæ quadrati à diametro B E, & vigeſimæ quartæ quadrati baſeos C D. Vnde, ſi ab angulo baſeos ducatur D G, perpendicularis ſuper latus D B, quæ occurrat productæ diametro B E in G; ſitque A centrum gravitatis trianguli; diviſoque intervallo G A in quatuor partes æquales, una earum A K apponatur ipſi B A; erit B K longitudo penduli iſochroni, ſi triangulum ſuſpendatur ex vertice B. Cum autem ex puncto mediæ baſis E ſuſpenditur, longitudo penduli iſochroni E K æquabitur dimidiæ B G.

Atque hinc liquet, triangulum iſoſceles rectangulum, ſi ex puncto mediæ baſis ſuſpendatur, iſochronum eſſe pendulo longitudinem diametro ſuæ æqualem habenti. Similiterque, ſi ſuſpendatur ab angulo ſuo recto, eidem pendulo iſochronum eſſe.



Centrum oscillationis Parabolæ.

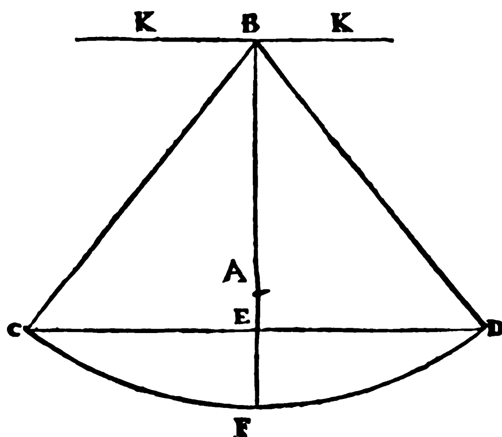
In parabolæ portione recta, ſpatium applicandum æquatur $\frac{12}{175}$ quadrati axis, una cum quinta parte quadrati dimidiæ baſis. Cum-

De centro Oscillationis.

que parabola ex verticis puncto suspensa est, invenitur penduli isochroni longitudo $\frac{5}{7}$ axis, atque insuper $\frac{1}{3}$ lateris recti. Cum vero ex puncto mediæ basis suspenditur, erit ea longitudo $\frac{4}{7}$ axis, & insuper $\frac{1}{2}$ lateris recti.

Centrum oscillationis Sectoris circuli.

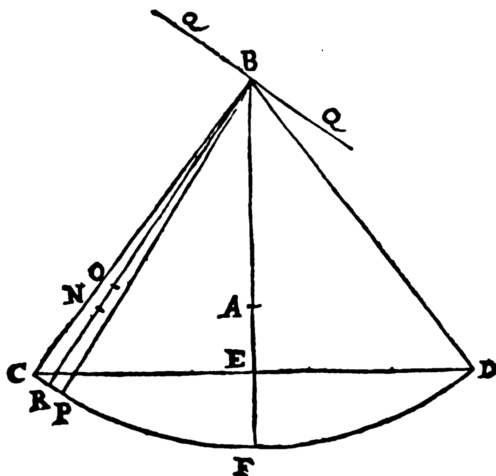
In circuli sectore B C D, si radius B C vocetur r: semi arcus C F, p: semisubtensa C E, b: fit spatium applicandum æquale $\frac{1}{2} rr - \frac{4bbrr}{9pp}$, hoc est, dimidio quadrati B C, minus quadrato B A; ponendo



A esse centrum gravitatis sectoris. Tunc enim B A ∞ $\frac{2br}{3p}$. Si autem suspendatur sector ex B, centro circuli sui, fit pendulum ipsi isochronum $\frac{3pr}{4b}$, hoc est, trium quartarum rectæ, quæ sit ad radium B F ut arcus C F D ad subtensam C D. Hæc autem inveniuntur cognitis subcentricis cuneorum; tum illius qui super sectore toto abscinditur, plano ducto per B K parallelam subtensæ C D, cujus cunei subcentricam super B K invenimus esse $\frac{3}{8} r - \frac{3}{8} a + \frac{3pr}{8b}$, vocando a sinum versum B F; tum illius qui super dimidio sectore B F C abscinditur plano per B F, cujus nempe cunei subcentricam super B F invenimus $\frac{3}{8} b - \frac{3br}{8a} + \frac{3pr}{8a}$.

Sed & alia via, sectoris centrum oscillationis, facilius invenitur, quæ est hujusmodi. Intelligatur sectoris B C D pars minima sector B C P, qui trianguli loco haberi potest. Quadrata autem, à distantiis particularum ejus à puncto B, æqualia sunt quadratis distantiarum ab recta B R, bifariam sectorem dividente, una cum quadratis distantiarum ab recta B Q, quæ ipsi B R est ad angulos rectos. Sed, horum quadratorum ad illa, ratio quavis data est major, quoniam angulus C B P minimus; ideoque illa pro nullis habenda sunt.

Positâ vero B O duarum tertiarum B R, hoc est, posito O centro gravitatis trianguli B C P; & B N trium quartarum B R; ut nempe N sit centrum gravitatis cunei, super triangulo B C P abscissi plano per B Q. His positis, constat quadrata, à distantiis particularum trianguli B C P ab recta B Q, æquari rectangulo N B O multiplici secundum particularum ejusdem trianguli numerum. Itaque rectangulum N B O, ita multiplex, æquale censendum quadratis distantiarum à puncto B particularum trianguli B C P. Sunt autem quadrata De centro Oscillationis.



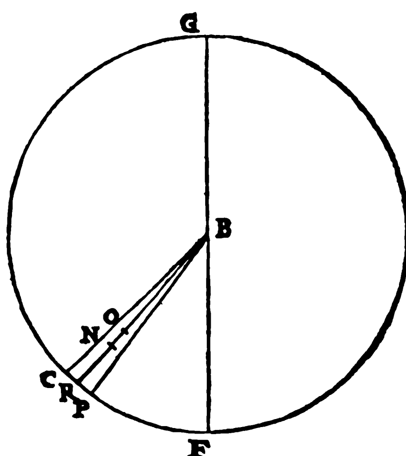
distantiarum harum, ad quadrata distantiarum totius sectoris B C D, sicut sector B C P ad sectorem B C D, hoc est, sicut numerus particularum sectoris B C P, ad numerum particularum sectoris B C D; hoc enim facile intelligitur, eo quod sector B C D dividatur in sectores qualis B C P. Ergo rectangulum N B O, multiplex secundum numerum particularum sectoris B C D, æquale erit quadratis distantiarum particularum ejus à puncto B. Ideoque rectangulum N B O, applicatum ad B A, distantiam inter suspensionem & centrum gravitatis sectoris, dabit longitudinem penduli isochroni, cum sector ex B suspenditur *. Est autem rectangulum N B O ∞ $\frac{1}{2}$ rr: distantia autem B A, ut jam ante diximus, ∞ $\frac{2br}{3p}$. Unde, facta applicatione, oritur $\frac{3pr}{4b}$, longitudo penduli isochroni, ut ante quoque inventa fuit. * Prop. 17. huj.

Centrum oscillationis Circuli, aliter quam supra.

Eodem modo etiam simplicissime, in circulo, centrum oscillationis invenire licet. Sit enim circulus G C F, cujus centrum B; sectorque in eo minimus intelligatur B C P, sicut ante in sectore B C D.

De centro Oscillationis.

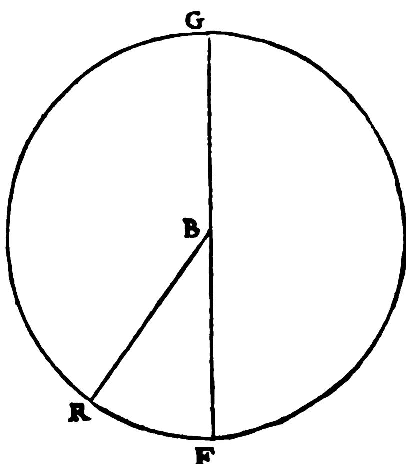
Cum igitur, ſecundum modo expoſita, quadrata, à diſtantiis particularum ſectoris B C P ad centrum B, æquentur rectangulo N B O, hoc eſt, dimidio quadrato radii, multiplici ſecundum ſectoris ipſius particularum numerum; circulus autem ex ejuſmodi ſectoribus componatur; erunt proinde quadrata, à diſtantiis particularum circuli totius ad centrum B, æqualia dimidio quadrato radii, multiplici ſecundum numerum earundem circuli particularum.



Eſt autem B centrum gravitatis circuli. Ergo dictum dimidium quadratum radii, hic erit ſpatium applicandum diſtantiæ inter ſuſpenſionem & centrum B, ut habeatur intervallum, quo centrum oſcillationis inferius eſt ipſo centro B*. quod & ſupra ita ſe habere oſtendimus.

* Prop. 18. huj.

Centrum oſcillationis Peripheriæ circuli.



Facilius etiam, centrum oſcillationis circumferentiæ circuli, hoc

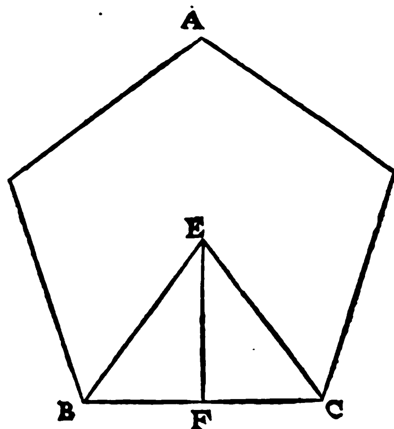
pacto reperitur. Esto enim circumferentia descripta centro B, radio B R. Quadratum igitur B R, multiplex secundum numerum particularum in quas circumferentia divisa intelligitur, æquatur quadratis à distantiis omnium earum particularum ad centrum B. Quare quadratum B R erit hic spatium applicandum *. Patetque hinc, si suspensio sit ex G, puncto circumferentiæ, penduli isochroni longitudinem æquari diametro G F.

De centro Oscillationis.

* Prop. 18. huj.

Centrum oscillationis Polygonorum ordinatorum.

Haud absimiliter & polygono cuivis ordinato, ut A B C, pendulum isochronum invenitur. Fit enim, spatium applicandum, æquale semissi quadrati perpendicularis ex centro in latus polygoni, una



cum vigesima quarta parte quadrati lateris. At, si perimetro poligoni pendulum isochronum quæratur, fit spatium applicandum æquale quadrato perpendicularis à centro in latus, cum duodecima parte quadrati lateris.

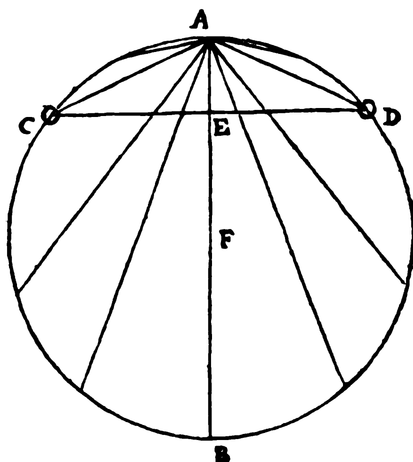
Loci plani & solidi usus in hac Theoria.

Est præterea & Locorum contemplatio in his non injucunda. Vt si propositum sit, dato puncto suspensionis A, & longitudine A B, invenire locum duorum ponderum æqualium C, D, æqualiter ab A & à perpendiculari A B distantium, quæ agitata circa axem in A, perpendicularem plano per A C D, isochrona sint pendulo simplici longitudinis A B.

Ponatur A B ∞ a, ductâque C D, quæ secet A B ad angulos rectos in E, sit A E indeterminata ∞ x: E C vel E D ∞ y. Ergo quadratum A C ∞ $x x + y y$. Hoc vero multiplex secundum numerum particularum ponderum C, D, quæ hic minima intelliguntur, æquatur quadratis distantiarum earundem particularum ab axe

suspensionis A. Ergo quadratum A C, sive $xx + yy$, applicatum ad distantiam A E, quæ nempe est inter axem suspensionis & centrum gravitatis ponderum C, D, efficiet $\frac{xx+yy}{x}$, longitudinem penduli isochroni *; quam propterea oportet æqualem esse A B sive a.

*Prop 17. huj.



Itaque $\frac{xx+yy}{x} \propto a$. Et $yy \propto ax - xx$. Unde patet, locum punctorum C & D, esse circumferentiam circuli, cujus centrum F, ubi A B bifariam dividitur, radius autem $\propto \frac{1}{2} a$, sive F A. Ergo, ubicunque in circumferentia A C B D duo pondera æqualia, æqualiter ab A distantia, ponentur, ea, ex A agitata, isochrona erunt pendulo longitudinem habenti æqualem diametro A B.

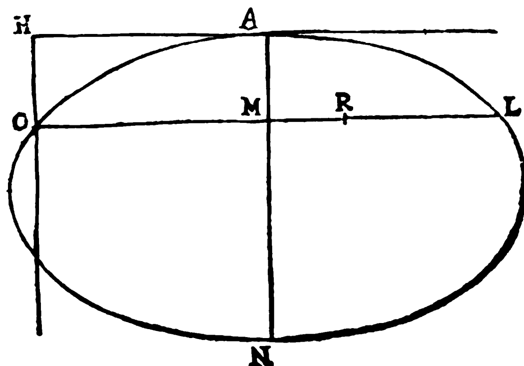
Atque hinc manifestum quoque, & circumferentiam A C B D, si gravitas ei tribuatur, & quamlibet ejus portionem, æqualiter in A vel B divisam, & ab axe per A suspensam, eidem pendulo A B isochronam esse.

Loci vero solidi exemplum esto hujusmodi. Sit A N linea inflexilis sine pondere. Propositumque sit, ad punctum in ea acceptum, ut M, affigere ipsi ad angulos rectos lineam, seu virgam, pondere præditam O M L, ad M bifariam divisam, cujus in latus agitatæ oscillationes, ex suspensione A, isochronæ sint pendulo simplici longitudinis A N.

Ducatur O H parallela A N, & A H parallela O M, & sit O R æqualis $\frac{1}{3}$ O L. Itaque cunei super recta O L, abscissi plano per O H ducto, subcentrica erit O R. Sed cunei alterius super eadem O L, abscissi plano per rectam A H, (est autem cuneus hic nihil aliud quam rectangulum) subcentrica erit ipsa A M. Quare rectangulum illud, quod supra Oscillationis vocavimus, erit solum rectangulum O M R. quod nempe, applicatum ad longitudinem A M, dabit distantiam centri oscillationis lineæ O L, ex A suspensæ, infra punctum M.

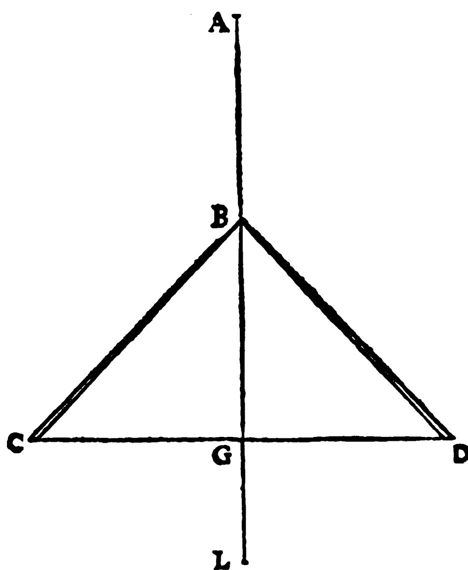
Sit jam A N ∞ a : A M ∞ x : M O vel M L ∞ y. Est ergo rectangulum O M R ∞ $\frac{1}{3}yy$. quo applicato ad A M, fit $\frac{1yy}{3x}$. quæ longitudo itaque ipsi M N æqualis esse debebit, cum velimus centrum oscillationis virgæ O L esse in N. Fit ergo æquatio $\frac{1yy}{3x} + x$ ∞ a. Unde y ∞ $\sqrt{3ax - 3xx}$. Quod significat puncta O & L esse ad Ellipsin, cujus axis minor A N; latus rectum vero, secundum quod possunt ordinatim ad axem hunc applicatæ, ipsius A N triplum.

De centro Oscillationis.



Hinc vero manifestum fit, cum omnis virga ipsi O L parallela, & ad Ellipsin hanc terminata, oscillationes isochronas habeat pendulo simplici A N, etiam totum Ellipseos planum, ex A suspensum & in latus agitatum, ipsi A N pendulo isochronum fore. Sed & partem Ellipseos quamlibet, quæ lineis una vel duabus, ad A N perpendicularibus, abscindetur.

Cæterum adscribemus & aliud loci plani exemplum, in quo nonnulla notatu digna occurrunt.



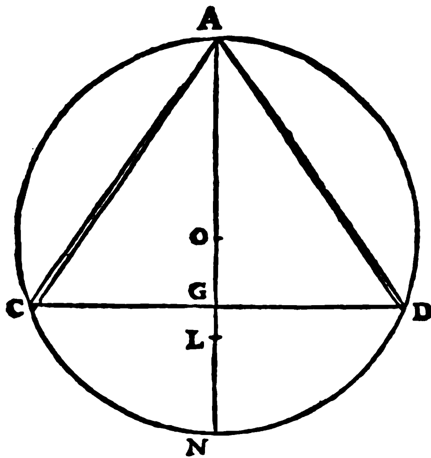
Sit virga A B ponderis expers, suspensa ex A; oporteatque, ad da-

De centro Oscillationis.

tum in ea punctum B, affigere triangula duo paria, & paribus angulis ab axe A B recedentia, quorum anguli ad B minimi, sive infinite parvi existimandi, quæque, ita suspensa ab A, oscillationes isochronas faciant pendulo simplici datæ longitudinis A L.

Hic, ducta C G perpendiculari in B G, & ponendo $AB = a$; $AL = b$; $BG = x$; $CG = y$: invenitur æquatio $y = \sqrt{2ab - 2aa - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$. ex qua patet, bases triangulorum C, & D, quæ bases hic ut puncta considerantur, esse ad circuli circumferentiam; quia nempe habetur terminus simplex $-xx$.

Licet autem hic animadvertere, quod si a sit nihilo æqualis, hoc est, si punctum, ubi affiguntur trianguli B C, B D, sit idem cum puncto A; tum futura sit æquatio $y = \sqrt{\frac{4}{3}bx - xx}$. Ac proinde, hoc casu, si sumatur $AO = \frac{2}{3}b$, hoc est, $= \frac{2}{3}AL$, centroque O per A circulus describatur A D N; erunt bases triangulorum A C,

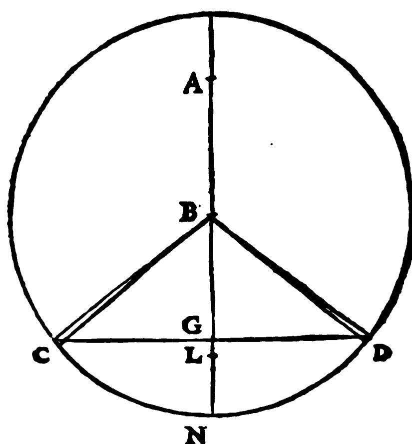


A D, ad illius circumferentiam. Cum igitur quælibet duo triangula acutissima, quæ ex A ad circumferentiam A C N D constituuntur, magnitudine & situ sibi respondentia, centrum oscillationis habeant punctum L, positâ $AL = \frac{3}{4}$ diametri A N; cumque circulus totus ex ejusmodi triangulorum paribus componatur; uti & portio ejus quælibet, ut A C N D, latera A C, A D æqualia habens; manifestum est, tum circuli totius, tum portionis qualem diximus, centrum oscillationis esse in L.

Rursus, si in æquatione inventa ponatur $\frac{8}{3}a = \frac{4}{3}b$, seu $2a = b$; hoc est, si triangula affigi intelligantur in B, quod longitudinem A L secet bifariam, erit $y = \sqrt{2aa - xx}$. quæ æquatio docet, quod si centro B, radio qui possit duplum B A, circumferentia describatur, ea erit locus basium triangulorum acutissimorum B C, B D,

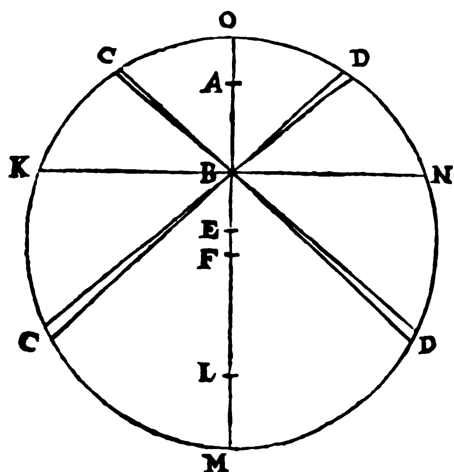
quorum

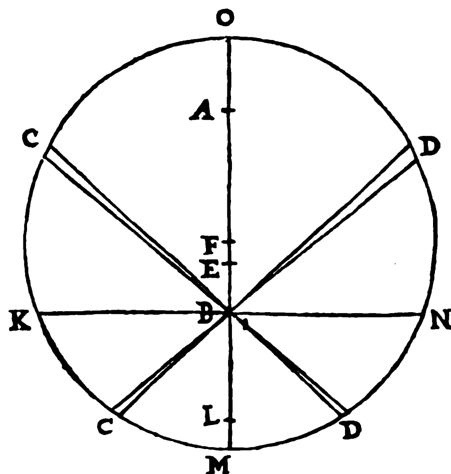
quorum nempe, ex A suspensorum, centrum oscillationis erit L punctum. Cumque & circulus totus, & sector ejus quilibet, axem habens in recta A L, ex hujusmodi triangulorum paribus componatur, manifestum est & horum, ex A suspensorum, centrum oscillationis esse punctum L.



Adeoque quilibet circuli sector, suspensus à puncto quod distet, à centro circuli sui, semisse lateris quadrati circulo inscripti, pendulum isochronum habebit toti eidem lateri æquale. Atque ita, hoc uno casu, absque posita dimensione arcus, pendulum sectori isochronum invenitur.

Porro, ad universalem constructionem æquationis primæ, $y \infty \sqrt{2ab - 2aa - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$, dividatur A L bifariam in E, & adponatur ad B E pars sui tertia E F; eritque F centrum describendi circuli; radius autem F O æqualis sumendus ei, quæ potest duplum differentiæ quadratorum A E, E F.

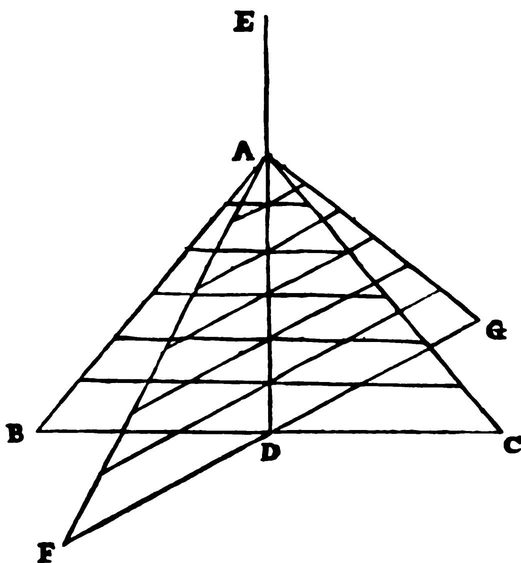




Si itaque, ex puncto B, ad descriptam circumferentiam triangula duo paria acutissima constituantur, ut B C, B D; illorum, ex A

ſuſpenſorum, centrum oſcillationis erit L. Quare & portionis cujuſlibet deſcripti circuli, cujus portionis vertex ſit in B, axis vero in recta A L, quales ſunt utraque C B D; poſita ſuſpenſione ex A; centrum oſcillationis idem punctum L eſſe conſtat. Atque adeo etiam circuli ſegmentorum K O N, K M N, quæ facit recta K B N perpendicularis ad A B.

Et hæc quidem de motu laterali planorum, ac linearum, animadvertiſſe ſufficiat. Quibus hoc tantum addimus; inventis centris oſcillationis figurarum rectarum, ſeu quæ æqualiter ad axem utrinque conſtitutæ ſunt; ut trianguli iſoſcelis, vel parabolicæ ſectionis rectæ; etiam obliquarum, quæ velut luxatione illarum efficiuntur, ut trianguli ſcaleni, & parabolæ non rectæ, centra oſcillationis haberi. Vt ſi, exempli gratia, triangulum B A C iſoſceles, cujus axis A D, à puncto E ſuſpenſum intelligatur; ſit vero & aliud triangulum ſcalenum F A G, axem eundem habens A D, & baſin F G æqualem baſi B C; etiam hoc triangulum, ex E ſuſpenſum, priori B A C iſochronum eſſe dico.



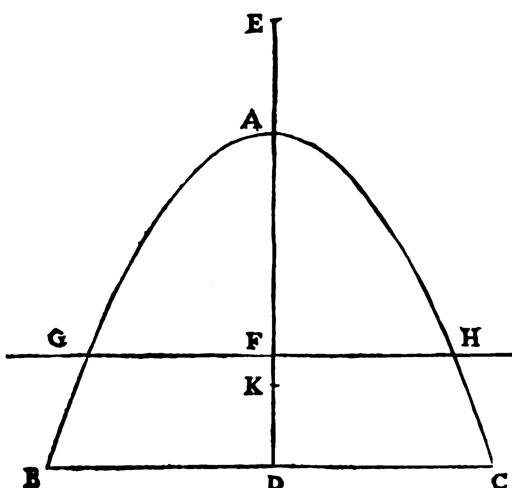
Quia enim virga, ſeu linea gravis, F G, affixa virgæ ſine pondere E D in D, ſitu obliquo, ſuſpenſaque ex E, iſochrona eſt virgæ B C, ſimiliter in D affixæ*; idemque evenit in virgis cæteris trianguli utriuſque, quæ axem A D ſecant in iiſdem punctis, atque inter ſe æquales ſunt: neceſſe eſt tota triangula, quæ ex lineis, ſeu virgis iiſdem compoſita intelligi poſſunt, iſochrona eſſe. In aliis figuris ſimilis eſt demonſtratio.

*Prop 16. huj.

PROPOSITIO XXII.

Quomodo, in solidis figuris, oscillationis centra inveniantur.

In solidis porro figuris facile quoque, per ante demonstrata, centrum oscillationis invenire licebit. Si enim sit solidum A B C, suspensum ab axe, qui, per punctum E, intelligitur hujus paginæ plano ad rectos angulos; centrum autem gravitatis sit F: ductis jam per F planis E F D, G F H, quorum posterius sit horizonti parallelum, alterum vero per axem E transeat; inventisque, per propositionem 14, summis quadratorum à distantiis particularum solidi A B C à plano G F H, itemque à plano E F D; hoc est, inventis rectangulis utrisque, quæ, multiplicia secundum numerum dictarum particularum, æqualia sint dictis quadratorum summis; rectangula hæc applicata ad distantiam E F, qua nempe axis suspensionis distat à centro gravitatis, dabunt intervallum F K, quo centrum agitationis K inferius est centro gravitatis F. Hoc enim patet ex propositione 18. Dabimus autem & horum exempla aliquot.

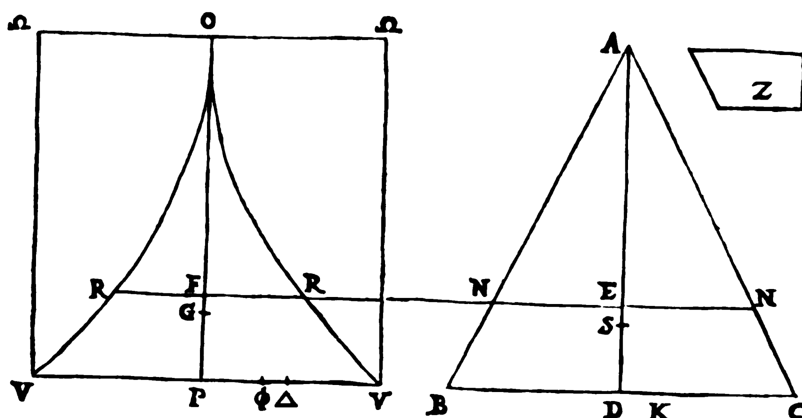


Centrum oscillationis in Pyramide.

Sit primum A B C pyramis, verticem habens A, axem A D, basin vero quadratum, cujus latus B C. ponaturque agitari circa axem qui, per verticem A, sit hujus paginæ plano ad angulos rectos.

Hic figura plana proportionalis O V V, à latere adponenda, secundum propositionem 14, constabit ex residuis parabolicis O P V, quæ nempe supersunt, cum, à rectangulis Ω P, auferuntur semiparabolæ O V Ω, verticem habentes O.

Sicut enim inter se sectiones pyramidis B C, N N, ita quoque rectæ V V, R R, ipsis in figura plana respondentes. & sicut centrum gravitatis E distat, à vertice pyramidis, tribus quartis axis A D, ita quoque centrum gravitatis F, figuræ O V V, distabit tribus quartis diametri O P à vertice O.



Intellecto porro horizontali plano N E, per centrum gravitatis pyramidis A B C, quod idem figuram O V V secet secundum R F; inventâque subcentricâ cunei, super figura O V V abscissi plano per O Ω, quæ subcentrica sit O G, (est autem $\frac{4}{5}$ diametri O P) erit rectangulum O F G, multiplex per numerum particularum figuræ O V V, æquale quadratis distantiarum ab recta R F *, ac proinde quoque quadratis distantiarum à plano N E, particularum solidi A B C. Fit autem rectangulum O F G æquale $\frac{3}{80}$ quadrati O P, vel quadrati A D.

*Prop. 10. huj.

Deinde, ad inveniendam summam quadratorum à distantiis à plano A D, noscenda primo subcentrica cunei, super quadrata basi pyramidis B C abscissi, plano per rectam quæ in B intelligitur axi A parallela; quæ subcentrica sit B K; estque $\frac{4}{5}$ B C. Noscenda item distantia centr. gr. dimidiæ figuræ O P V ab O P; quæ sit Φ P; estque $\frac{3}{10}$ P V. Inde, divisâ bifariam P V in Δ, si fiat ut Δ P ad P Φ, hoc est, ut 5 ad 3, ita rectangulum B D K, quod est $\frac{1}{12}$ quadrati B C, ad aliud spatium Z; erit hoc, multiplex secundum numerum particularum solidi A B C, æquale quadratis distantiarum à plano A D *. Apparet autem, fieri spatium Z æquale $\frac{1}{20}$ quadrati B C.

*Prop. 15. huj.

Itaque, totum spatium applicandum, æquatur hic $\frac{3}{80}$ quadrati A D, cum $\frac{1}{20}$ quadrati B C. Unde, si suspensio, ut hic, posita fuerit in A, vertice pyramidis, ideoque distantia, ad quam applicatio facienda,

A E æqualis $\frac{3}{4}$ A D; fiet hinc E S, intervallum quo centrum agitationis inferius est centro gravitatis, æquale $\frac{1}{20}$ A D, atque insuper $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionalis duabus A D, B C. sive tota A S æqualis $\frac{4}{5}$ A D, præter dictam $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionalis. De centro Oscillationis.

Centrum oscillationis Coni.

Quod si A B C conus fuerit, omnia eodem modo se habebunt, nisi quod spatium Z hic sit æquale rectangulo Δ P Φ*, hoc est $\frac{3}{20}$ quadrati P V vel B D, sive $\frac{3}{80}$ quadrati B C. Quare, totum spatium appplicandum, in cono erit $\frac{3}{80}$ quadrati A D, una cum $\frac{3}{80}$ quadrati B C. Ac proinde, posita suspensione ex vertice A, fiet E S, qua centrum agitationis inferius est centro gravitatis, æqualis $\frac{1}{10}$ A D, & $\frac{1}{10}$ tertiæ proportionalis duabus A D, B C. sive tota A S æqualis $\frac{4}{5}$ A D, una cum $\frac{1}{5}$ tertiæ proportionalis duabus A D, D B. Atque hinc manifestum est, si A D, D B æquales sint, hoc est, si conus A B C sit rectangulus, fieri A S æqualem axi A D.

* Prop. 15. huj.

Sequitur quoque porro, ex propositione 20, conum hunc rectangulum, si ex D centro baseos suspendatur, isochronum fore sibi ipsi ex vertice A suspenso, quemadmodum & de triangulo rectangulo supra ostensum fuit.

Centrum oscillationis Sphæræ.

Si A B C sit sphæra, erit figura plana proportionalis, à latere adponenda, O V H, ex parabolis composita, quarum basis communis O H, æqualis sphæræ diametro A D. Sectâ vero spherâ planis per centrum E, quorum B C sit horizonti parallelum, A D vero verticale: ut inveniatur summa quadratorum à distantiis à plano A D, noscenda est distantia centri gr. parabolæ O V H ab O H, quæ sit Φ P, estque $\frac{2}{5}$ V P. Deinde, divisâ P V bifariam in Δ, constat rectangulum Δ P Φ, multiplex per numerum particularum spheræ A B C, æquari quadratis distantiarum à plano A D*. Est autem rectangulum Δ P Φ æquale $\frac{1}{5}$ quadrati P V, vel quadrati B E.

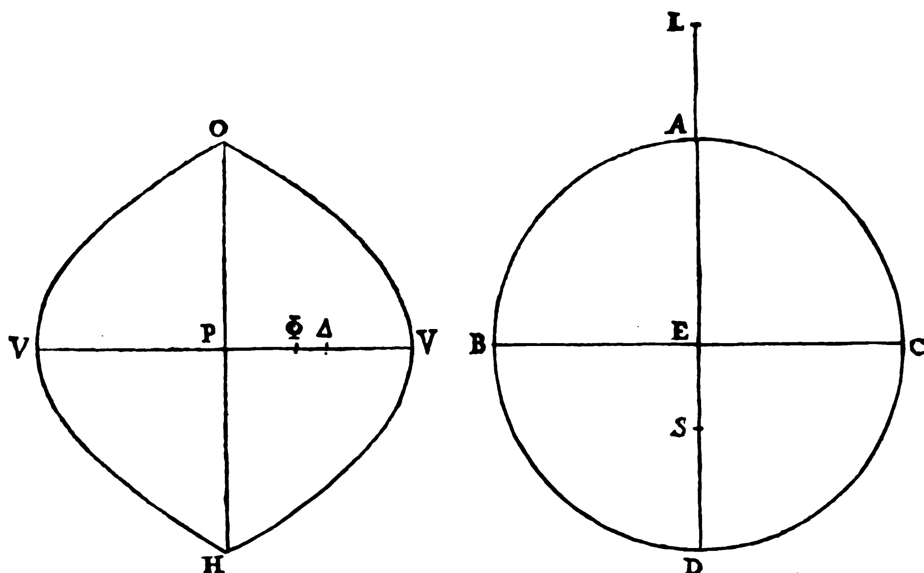
* Prop. 15. in fine.

Atqui, quadrata distantiarum à plano B C, æqualia esse liquet quadratis distantiarum à plano A D, ac proinde eidem rectangulo Δ P Φ, multiplici per dictum particularum numerum. Ergo spatium applicandum, in sphera A B C, erit duplum rectanguli Δ P Φ; ideoque æquale $\frac{2}{5}$ quadrati à radio E B.

Itaque, si sphera suspensa sit ex puncto in superficie sua A, erit

De centro Oscillationis.

E S, à centro sphæræ E ad centrum agitationis S, æqualis $\frac{2}{5}$ semidiametri A E. Totaque A S æqualis $\frac{7}{10}$ diametri A D. Si vero ex puncto alio, ut L, sphera suspensa sit; erit E S æqualis $\frac{2}{5}$ tertiæ proportionalis duabus L E, E B.



Centrum oscillationis Cylindri.

In cylindro, invenimus spatium applicandum æquari $\frac{1}{12}$ quadrati altitudinis, una cum $\frac{1}{4}$ quadrati à semidiametro basis. Unde si cylindrus à centro basis superioris suspendatur, fit longitudo penduli isochroni æqualis $\frac{2}{3}$ altitudinis, una cum semisse ejus, quæ sit ad semidiametrum basis ut hæc ad altitudinem.

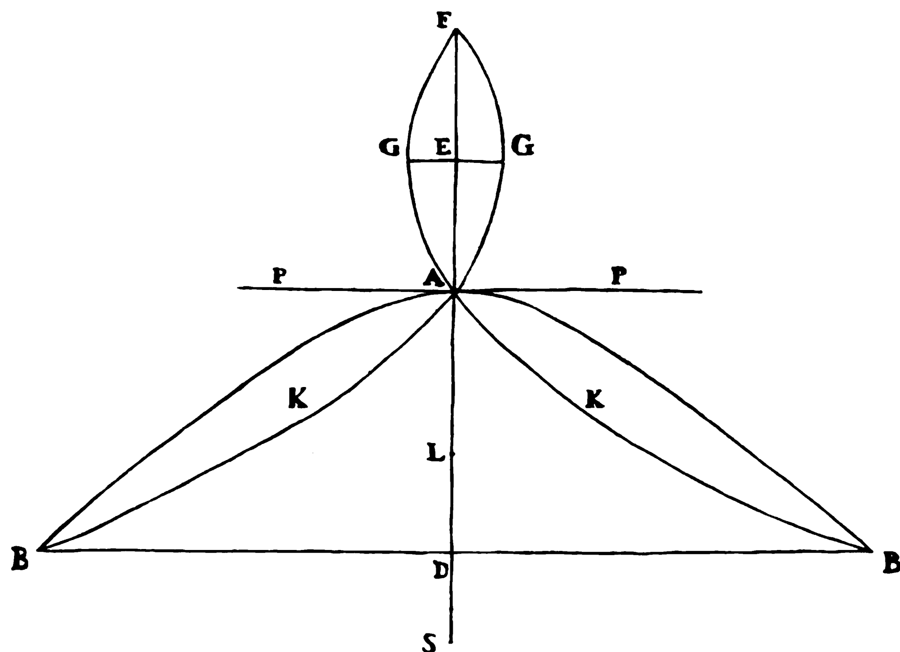
Centrum oscillationis Conoidis Parabolici.

In conoide parabolico, rectangulum oscillationis est $\frac{1}{18}$ quadrati altitudinis, cum $\frac{1}{6}$ quadrati à semidiametro basis. Unde, si à puncto verticis fuerit suspensum, fit longitudo penduli isochroni $\frac{3}{4}$ axis, cum $\frac{1}{4}$ ejus quæ sit ad semidiametrum basis, sicut hæc ad axem, id est, una cum $\frac{1}{4}$ lateris recti parabolæ genitricis.

Centrum oscillationis Conoidis Hyperbolici.

In conoide quoque hyperbolico centrum oscillationis inveniri potest. Si enim, exempli gratia, sit conoides cujus sectio per axem, hyperbola B A B; axem habens A D, latus transversum A F: erit figura plana ipsi proportionalis B K A K B, contenta basi B B,

& parabolicæ lineæ portionibus similibus A K B, quæ parabolæ per verticem A transeunt, axemque habent G E, dividentem bifariam latus transversum A F, ac parallelum basi B B. Et hujus quidem figuræ B K A K B, centrum gravitatis L, tantum distat à vertice A, quantum centrum gravitatis conoidis A B B; estque axis A D ad A L, sicut tripla F A cum dupla A D, ad duplam F A cum sesquialtera A D. Deinde & distantia centri gr. figuræ dimidiæ A D B K, ab A D, inveniri potest, atque etiam subcentrica cunei super figura B K A K B, abscissi plano per A P, parallelam B B; hujus inquam cunei subcentrica, super ipsa A P, inveniri quoque potest; atque ex his consequenter centrum agitationis conoidis, in quavis suspensione; dummodo axis, circa quem movetur, sit basi conoidis parallelus. Atque invenio quidem, si axis A D lateri transverso A F æqualis ponatur, spatium applicandum æquari $\frac{1}{10}$ quadrati A D, cum $\frac{31}{100}$ quadrati D B. Tunc autem A L est $\frac{7}{10}$ A D. De centro Oscillationis.



Vnde, si conoides hujusmodi ex vertice A suspendatur, invenitur longitudo penduli isochroni, A S, æqualis $\frac{27}{35}$ A D, cum $\frac{31}{140}$ tertiæ proportionalis duabus A D, D B.

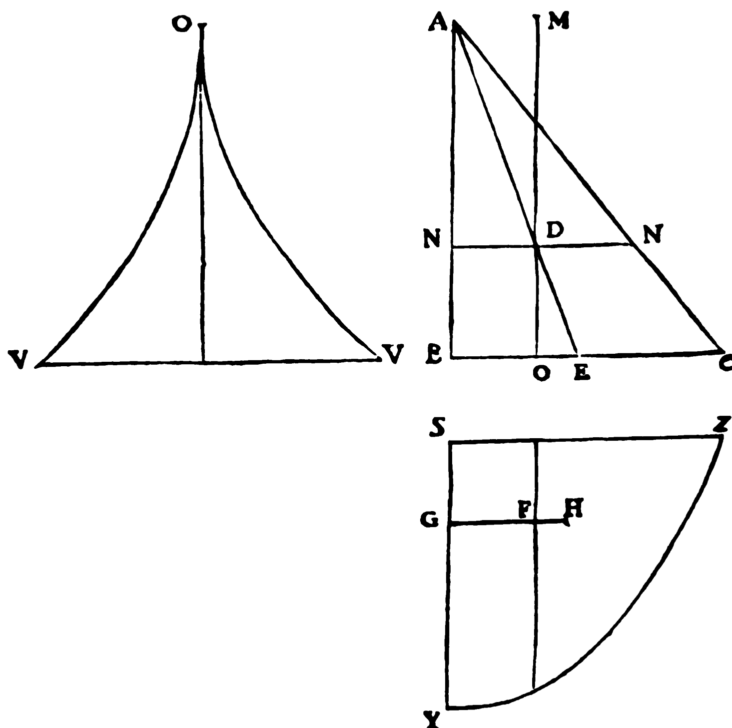
Centrum oscillationis dimidii Coni.

Denique & in solidis dimidiatis quibusdam, quæ fiunt sectione per axem, centrum agitationis invenire licebit. Vt si sit conus dimidiatus A B C, verticem habens A, diametrum semicirculi ba-

De centro Oscillationis.

ſeos B C: ejus quidem centrum gravitatis D notum eſt, quoniam A D ſunt $\frac{3}{4}$ rectæ A E, ita dividentis B C in E, ut, ſicut quadrans circumferentiæ circuli ad radium, ita ſint $\frac{2}{3}$ C B ad B E. Tunc enim E eſt centrum gravitatis ſemicirculi baſeos, ideoque in A E centra gravitatis omnium ſegmentorum ſemiconi A B D, baſi parallelorum.

Et figura quidem porro proportionalis à latere ponenda, O V V, eadem eſt quæ in cono toto ſupra deſcripta fuit: per quam nempe invenietur ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum ſemiconi à plano horizontali N D, per centrum gravitatis ducto. Verum quadrata diſtantiarum, à plano verticali M D O, ut colligantur, altera quoque figura proportionalis S Y Z, ſicut ſupra prop. 14. adhibenda eſt, cujus nempe ſectiones verticales, exhibeant lineas proportionales ſectionibus ſibi reſpondentibus in ſemicono A B C.



& hujus figuræ cognoſcenda eſt diſtantia centri gr. F ab S Y, quam æqualem eſſe conſtat diſtantiæ D N, centri gr. ſemiconi à plano trianguli A B. poſitâque H G ſubcentricâ cunei abſciſſi ſuper figura S Z Y, ducto plano per S Y, noſcendum eſt rectangulum G F H, cujus nempe multiplex, ſecundum numerum particularum ſemiconi A B C, æquabitur quadratis diſtantiarum ſemiconi in planum M D O. Licebit vero cognoſcere rectangulum illud G F H, etiamſi ſubcentricæ H G longitudo ignoretur, hoc modo.

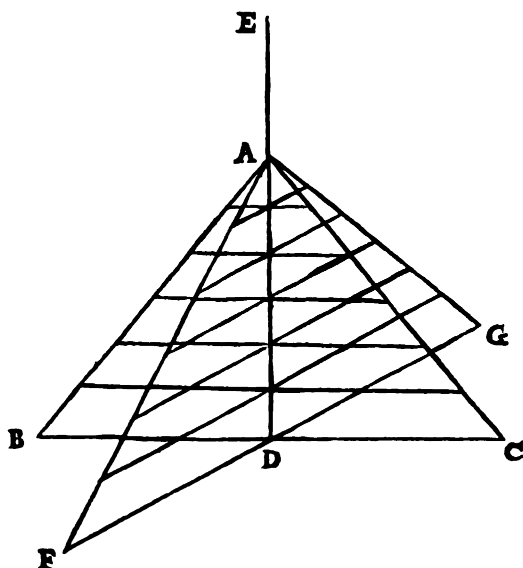
Diximus ſupra, cum de cono ageremus, quadrata diſtantiarum à plano

à plano per axem ejus, æquari $\frac{3}{80}$ quadrati à diametro basis, sive $\frac{3}{20}$ quadrati à semidiametro, multiplicis per numerum particularum coni totius. Vnde & hic, in semicono A B C, quadrata distantiarum à plano A B æqualia erunt $\frac{3}{20}$ quadrati B C, multiplicis per numerum particularum ipsius semiconi. Sed & rectangulum H G F, multiplex per numerum particularum semiconi A B C, æquatur quadratis distantiarum à plano A B, ut patet ex propositione 9. Ergo rectangulum H G F æquale $\frac{3}{20}$ quadrati B C. Ponendo autem A B ∞ a; B C ∞ b; & quadrantem circumferentiæ, radio B C descriptæ, ∞ q; fit E B ∞ $\frac{2bb}{3q}$. Cujus cum N D tribus quartis æquetur, fiet proinde N D, sive G F ∞ $\frac{1bb}{2q}$. Cujus quadratum auferendo à rectangulo H G F, quod erat $\frac{3}{20}$ quadrati B C, fiet rectangulum G F H ∞ $\frac{3}{20}bb - \frac{1b^4}{4qq}$. Hoc autem rectangulum, multiplex per numerum particularum semiconi A B C, æquatur quadratis distantiarum à plano M D O. At quadratis distantiarum à plano M D æquantur, ut in cono, $\frac{3}{80}$ quadrati A B, sive $\frac{3}{80}aa$, multiplices per numerum particularum semiconi A B C. Itaque, totum spatium applicandum, æquabitur hic $\frac{3}{80}aa + \frac{3}{20}bb - \frac{1b^4}{4qq}$.

Vnde quidem centrum agitationis invenitur in omni suspensione semiconi, dummodo ab axe qui sit parallelus basi trianguli à sectione A B. Notandum vero, cum figura S Z Y sit ignotæ prorsus naturæ, subcentricam tamen G H, cunei super ipsa abscissi plano per S Y, hinc inveniri. Nam, quia rectangulum H G F æquale erat $\frac{3}{20}bb$, sive quadrati B C, & G F æqualis $\frac{1bb}{2q}$, fit inde G H æqualis $\frac{3}{10}q$.

Porro, etiam semicylindri, & semiconoidis parabolici, centra agitationis inveniri possunt, atque aliorum insuper semisolidorum; quæ aliis investiganda relinquimus.

Quemadmodum autem in figuris planis, ita & hic in solidis figuris locum habet, quod de obliquarum centris agitationis illic diximus, quæ veluti luxatione rectarum constituuntur, quarum centra oscillationis non differunt à centris oscillationis rectarum. Sic, si coni duo fuerint A B C, A F G, alter rectus, alter scalenus; quorum & diametri & bases æquales; hi ex vertice suspensi, vel à quibuscunque axibus, æqualiter à centris eorum gravitatis distantibus, isochroni erunt; dummodo axis, unde conus scalenus suspensus est, rectus sit ad planum trianguli per diametrum, quod planum basi est ad angulos rectos.

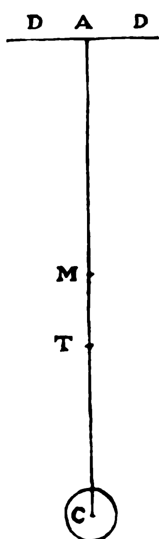


PROPOSITIO XXIII.

Horologiorum motum temperare, addito pondere exiguo ſecundario, quod ſuper virga penduli, certa ratione diviſa, ſurſum deorſumque moveri poſſit.

Vt hoc expediamus, primo penduli ipſius, ex virga gravitate prædita, & appenſo parte ima pondere, compoſiti, centrum oſcillationis inveniendum eſt.

Sit virga, cum appenſo pondere, A C, cujus longitudo dicatur *a*.



Intelligantur autem, tum virga ipſa, tum pondus appenſum C, in particulas minimas æquales diviſa, earumque particularum virga habeat numerum *b*, pondus vero C numerum *c*, ponendo nempe *b* ad *c*, ſicut gravitas virgæ ad gravitatem appenſi ponderis. Longitudo igitur penduli ſimplicis, dato iſochroni, habebitur, ſi ſumma quadratorum à diſtantiis particularum omnium à puncto ſuſpenſionis A, dividatur per ſummam earundem diſtantiarum *. Secetur A C bifariam in M; tum vero in T, ut A T ſit dupla T C. Quia ergo M eſt centrum gravitatis lineæ A C, & A T ſubcentrica cunei ſuper ipſa abſciſſi plano per A D, perpendicularem ad A C; qui cuneus hîc revera triangulum eſt; erit ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum virgæ à puncto A,

* Prop. 6. huj. in fine.

æqualis rectangulo A M T, una cum quadrato A M; hoc est, rectangulo T A M, multiplici secundum numerum particularum b; hoc est, $\frac{1}{3} a a b$; quia M A est $\frac{1}{2} a$, & T A $\frac{2}{3} a$, ac proinde rectangulum T A M ∞ $\frac{1}{3} a a$. Summa vero quadratorum, à distantiis particularum ponderis C ab eodem puncto A, æquabitur quadrato A C, multiplici secundum numerum particularum ipsius ponderis; hoc est, $a a c$. Adeoque summa quadratorum omnium, tam à distantiis particularum virgæ, quam ponderis C, erit $\frac{1}{3} a a b + a a c$. De centro Oscillationis.

Porro, distantiæ omnes particularum virgæ A C à puncto A, æquantur $\frac{1}{2} b a$; longitudini scilicet virgæ ipsius, quæ est a, multiplici secundum semissem numeri particularum quas continet. Et distantiæ omnes particularum ponderis C, ab eodem puncto A, sunt $a c$. Ita ut summa utrarumque distantiarum sit $\frac{1}{2} a b + a c$. Per quam dividendo summam quadratorum prius inventam, $\frac{1}{3} a a b + a a c$, fit $\frac{\frac{1}{3} a a b + a a c}{\frac{1}{2} a b + a c}$ sive $\frac{\frac{1}{3} a b + a c}{\frac{1}{2} b + c}$, longitudo penduli isochroni. Quæ itaque habebitur, si fiat, ut dimidia gravitas virgæ, una cum gravitate appensi ponderis, ad trientem gravitatis virgæ, una cum gravitate ejusdem appensi ponderis, ita longitudo A C ad aliam. Oportet autem sumere longitudinem A C, à puncto suspensionis A ad centrum gravitatis ponderis C; cum magnitudinis ejus ratio hic non habeatur, ac veluti minimum consideretur.



Quod si jam, præter pondus C, alterum insuper D virgæ inhærere intelligatur, cujus gravitas, seu particularum numerus sit d: distantia vero A D sit f. Vt pendulum simplex huic ita composito isochronum inveniatur, addenda sunt ad summam superiorem quadratorum, quadrata distantiarum particularum ponderis D à puncto A, quæ quadrata apparet esse $d f f$. Adeo ut summa omnium jam sit futura $\frac{1}{3} a a b + a a c + f f d$. Item, ad summam distantiarum, addendæ distantiæ particularum ponderis D, quæ faciunt $d f$. Ac summa proinde distantiarum omnium erit $\frac{1}{2} b a + c a + d f$; per quam dividenda est ista quadratorum summa, & fit $\frac{\frac{1}{3} a a b + a a c + f f d}{\frac{1}{2} a b + a c + f d}$, longitudo penduli isochroni.

Quod si vero, hæc longitudo penduli isochroni, datæ æqualis postuletur, quæ sit p, & reliqua omnia quæ prius data sint, præter

distantiam A D seu f, quæ determinat locum ponderis D: sitque invenienda hæc distantia, id fiet hoc modo. Nempe, cum postuletur $\frac{\frac{1}{3}aab + aac + ffd}{\frac{1}{2}ab + ac + fd}$ æquale p, orietur ex hac æquatione $ff \infty pf + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}aab - aac}{d}$. Et $f \infty \frac{1}{2}p + \text{vel} - \sqrt{\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}$. Vbi animadvertendum, duas esse veras radices, si $\frac{1}{2}abp + cap$ minus sit quam $\frac{1}{3}aab + aac$; hoc est, si longitudo p minor sit quam $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$, quæ antea inventa fuit longitudo penduli isochroni, sive distantia centri oscillationis à suspensione, in pendulo composito ex virga A C & pondere C.

Vnde patet, si velimus efficere, ut, applicato pondere D, acceleretur penduli motus; posse duobus locis, inter A & C, illud disponi, quorum utrolibet eadem celeritas pendulo concilietur: velut in D vel E. Quæ loca æqualiter distabunt à puncto N, quod abest ab A, semisse longitudinis p, hoc est, semisse penduli simplicis, cui compositum hoc isochronum postulabatur. Apparet autem, quando hæc longitudo p tantum exiguo minor ponitur quam A C, etiam punctum N exiguo superius esse puncto medio virgæ A C.

Porro, ex æquatione superiori, $f \infty p + \text{vel} - \sqrt{\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}$ habetur determinatio longitudinis p. Patet enim, $\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp}{d}$ non minus esse debere quam $\frac{\frac{1}{3}aab - aac}{d}$. Vnde non debebit esse minor quam $\frac{a}{d}\sqrt{\frac{4}{3}bd + 4cd + bb + 4be + 4cc - \frac{ab - 2ac}{d}}$. Quod si p æquetur huic quantitati, hoc est, si $\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp}{d}$ fuerit æquale $\frac{\frac{1}{3}aab - aac}{d}$, erit jam, in eadem superiori æquatione, $f \infty \frac{1}{2}p$, hoc est, $\frac{a}{2d}\sqrt{\frac{4}{3}bd + 4cd + bb + 4bc + 4cc - \frac{ab - 2ac}{2d}}$. Quo determinatur distantia ponderis D à puncto A, ex qua maxime omnium acceleret motum penduli.

Atque hæc ad horologiorum usum sic porro adhibentur. Sit, exempli gratia, pendulum horologii, quod singulis oscillationibus scrupula secunda notet. Virgæ autem gravitas sit $\frac{1}{50}$ gravitatis appensi ponderis in imo pendulo: &, præter hoc, sit aliud exiguum pondus mobile secundum virgæ longitudinem, cujus gravitas ea-

dem ponatur quæ ipsius virgæ. Quæritur jam, quo loco hoc virgæ imponendum, ut uno scrupulo primo acceleretur horologii motus, spatio 24 horarum. Item, ubi collocandum, ut duorum scrupulorum primorum sit acceleratio; item, ut trium, quatuor, atque ita porro. De centro Oscillationis.

Ductis viginti quatuor horis sexagies, fiunt 1440, quot nempe scrupula prima una die continentur. Ex his unum aufer, quando unius scrupuli acceleratio quæritur: supersunt 1439. Ratio autem 1440 ad 1439 duplicata, proxime est ea quæ 1440 ad 1438. Ergo, si penduli simplicis, secunda scrupula notantis, longitudo divisa intelligatur in partes æquales 1440, earumque 1438 alii pendulo tribuantur, hoc præcedet alterum illud, in 24 horis, uno scrupulo primo. Adeo ut hic p valeat partes 1438.

Quia autem pendulum horologii, ex virga metallica & pondere appenso compositum, isochronum ponitur pendulo simplici partium 1440; invenienda primum est virgæ illius longitudo, ex æquatione superius posita. Erat nempe $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$ æquale longitudini penduli simplicis, quod isochronum composito ex virga habente longitudinem a, gravitatem b, & pondere affixo cujus gravitas c. Ergo si longitudo penduli simplicis isochroni dicatur f. Erit $\frac{\frac{1}{2}bf + cf}{\frac{1}{3}b + c} \infty a$. positoque, ut hic, $c \infty 50$; $b \infty 1$; $f \infty 1440$; fiet $a \infty 1444\frac{4}{5}$, longitudo virgæ.

Iam, quia erat $f \infty \frac{1}{2}p +$ vel $- \sqrt{\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}aab - aac}{a}}$, fiet $f \infty \frac{1}{2}p +$ vel $- \sqrt{\frac{1}{4}pp + 72962p - 105061210}$. Vnde porro, si p sit, uti diximus, partium 1438; invenietur $f \infty 1331\frac{1}{2}$, qualium nempe f, seu pendulum simplex, secunda scrupula oscillationibus designans, continet 1440. Cujus longitudo si pedum trium statuatur, quos horarios vocavimus, habebit f uncias 33, & 3 unciarum uncias, quas lineas vocant. Vel, auferendo hanc longitudinem f à tota trium pedum longitudine, supererunt unciæ duæ, lineæ 9, à centro oscillationis penduli compositi sursum sumendæ, ut habeatur locus ponderis D, unius scrupuli primi accelerationem præstans tempore 24 horarum. Eodem modo reliquas distantias, quibus virga dividenda est, calculo investigavimus, aliam atque aliam ponendo longitudinem p: easque subjecta tabella exhibe-

De centro Oscillationis.

mus, secundum cujus numeros etiam virga penduli divisa est, quæ superius in descriptione horologii fuit exhibita. Procedunt autem accelerationes diurnæ, ut jam illic advertimus, per 15 scrupula secunda, seu primorum scrupulorum quadrantes. Ex. gr. si, pondere mobili D hærente in parte 73, 4, inveniatur horologium tardius justo incedere, in 24 horis, differentiâ 15 secundorum scrupulorum; oportebit sursum adducere pondus D, usque ad numerum 85, 6, ut corrigatur.

Acceleratio horologii spatio 24 horarum. Scrup. pr.	Sec.	Partes, à centro osc. sursum accipiendæ. Linea & decima linearum pedis horarii.
0,	15	7, 0
0,	30	15, 2
0,	45	23, 7
1,	0	32, 6
1,	15	41, 9
1,	30	51, 7
1,	45	62, 2
2,	0	73, 4
2,	15	85, 6
2,	30	99, 0
2,	45	114, 1
3,	0	131, 8
3,	15	154, 3
3,	30	192, 6

Centrum oscillationis altius est centro gravitatis C partibus 1, 4.

PROPOSITIO XXIV.

Centri oscillationis rationem haberi non posse, in pendulis inter Cycloides suspensis; & quomodo hinc orta difficultas tollatur.

Si quis, subtili examine, contulerit ea quæ in superioribus, de pendulo inter cycloides suspenso, demonstravimus, cum his quæ ad centrum oscillationis pertinent; videbitur ei deesse aliquid ad perfectam illam, quam præferimus, oscillationum æqualitatem. Ac primo dubitabit, an, ad inveniendum circulum cycloidis genitorem, penduli longitudo accipienda sit à puncto suspensionis ad

centrum gravitatis appensi plumbi, an vero ad centrum oscillationis; quod, ab altero illo, sæpe sensibili intervallo distat, atque eo majore, quo major fuerit sphæra aut lens plumbea. Quid enim, si sphæræ diameter quartam, aut tertiam partem, penduli longitudinis æquet? Quod si ad centrum oscillationis illam longitudinem accipiendam dicamus, non tamen expediet quo pacto ea, quæ de centro oscillationis ostensa sunt, conveniant pendulo continue longitudinem suam immutanti, quale illud quod inter cycloides movetur. Posset enim videri, etiam centrum oscillationis mutari, ad singulas diversas longitudines; quod tamen hoc modo intelligendum non est. Res sane explicatu difficillima, si omnimodam ἀκρίβειαν sectemur. Nam in demonstratione temporum æqualium in cycloide, mobile, per eam delatum, veluti punctum gravitate præditum consideravimus. Sed, si ad effectum spectemus, non magni facienda est difficultas hæc; cum ponderis, quo pendulum constat, magnitudo in horologiis tanta non requiratur (etsi quo majus eo melius) ut differentia centrorum gravitatis, & oscillationis, aliquid hic turbare possit. Quod si tamen effugere prorsus has tricas velimus, id ita consequemur, si sphæram lentemve penduli, circa axem suum horizontalem, mobilem efficiamus: axis extrema utrinque, virgæ penduli imæ, inserendo: quæ idcirco ut bifida hac parte sit necesse est. Fit enim hoc modo, ex motus natura, ut eandem perpetuo positionem, respectu horizontalis plani, sphæra penduli servet, atque ita puncta ejus quævis, æque ac centrum ipsum, cycloides easdem percurrant. Vnde cessat hic jam centrorum oscillationis consideratio; nec minus perfectam temporum æqualitatem tale pendulum consequitur, quam si puncto unico omnis ejus gravitas contineretur.

De centro Oscillationis.

PROPOSITIO XXV.

De mensura universalis, & perpetua, constituenda ratione.

Certa, ac permanens magnitudinum mensura, quæ nullis casibus obnoxia sit, nec temporum injuriis, aut longinquitate aboleri aut corrumpi possit, res est & utilissima, & à multis pridem quæsita. Quæ si priscis temporibus reperta fuisset, non tam perplexæ nunc forent, de pedis Romani, Græci, Hebræique veteris modulo, disceptationes. Hæc vero mensura, Horologii nostri opera, facile constituitur; cum sine illo nequaquam, aut ægre admodum, ha-

De centro Oscillationis.

beri possit. Etsi enim, simplici pendulorum oscillatione, hoc à quibusdam tentatum fuerit, numerando recursus qui tota cæli conversione continentur, vel parte ejus cognita, per fixarum stellarum distantias, secundum ascensionem rectam; nec certitudo eadem hoc modo, quæ adhibitis horologiis, contingit, & labor longe est molestissimus ac tædiosissimus, propter numerandi solicitudinem. Quia autem, præter horologia, aliquid, ad exactissimam hujus mensuræ inquisitionem, etiam centrorum oscillationis notitia confert; ideo hic demum, post eorum tractationem, hanc determinationem subjicimus.

Aptissima huic rei sunt horologia, quorum oscillationes singulæ secunda scrupula, vel eorum semisses, notant, quæque indicibus etiam, ad ea demonstranda, instructa sunt. Postquam enim, ad mediocrem dierum longitudinem, ejusmodi horologium, fixarum stellarum observationibus, compositum fuerit, methodo illa quam in horologii descriptione ostendimus: aliud pendulum simplex, hoc est, sphæra plumbea, aut alia materia gravi constans, ex tenui filo religata, juxta suspendenda est, motuque exiguo impellenda; ac tantisper producenda, aut contrahenda fili longitudo, donec recursus ejus, per quadrantem horæ, aut semissem, una ferantur cum reciprocationibus penduli horologio aptati. Dixi autem exiguo motu impellendum pendulum, quia oscillationes exiguæ, puta 5 vel 6 partium, satis æqualia tempora habent, magnæ vero non item. Tunc, acceptâ mensurâ distantiæ, à puncto suspensionis ad centrum oscillationis penduli simplicis; eâque, si recursus singuli scrupula secunda valeant, in tres partes divisâ; facient hæ singulæ longitudinem pedis, quem Horarium in superioribus vocavimus: quique, hoc pacto, non solum ubique gentium constitui possit, sed & venturo ævo redintegrari. Adeo ut & moduli pedum omnium aliorum, semel ad hunc proportionibus suis expressi, certò quoque in posterum cognosci possint. Sicut jam supra, pedem Parisiensem ad hunc horarium esse diximus, ut 864 ad 881; quod idem est ac si, posito prius pede Parisiensi, dicamus tribus hujusmodi pedibus, cum octo lineis & dimidia, constitui pendulum simplex, cujus oscillationes scrupulis secundis horariis responsuræ sint. Pes autem Parisiensis ad Rhenanum, quo in patria nostra utuntur, se habet ut 144 ad 139; hoc est, quinque lineis suis diminutus, alterum illum relinquit. Atque ita & hic pes, & alii quilibet, perpetuo duraturas mensuras accipiunt.

Quomodo autem centrum oscillationis in sphæra, ex qualibet longitudine

longitudine suspensa, inveniatur, in superioribus demonstratum est. Nempe, si fiat ut distantia inter punctum suspensionis & sphæræ centrum, ad semidiametrum ejus, ita hæc ad aliam; ejus duas quintas, à centro deorsum acceptas, terminari in quæsito oscillationis centro. Facile autem apparet cur necessaria sit hujus centri consideratio, ad accuratam pedis Horarii constitutionem. Nam, si à puncto suspensionis ad sphæræ centrum distantia accipiatur, sphæræ autem magnitudo non definiatur proportione ad fili longitudinem, non erit certa mensura penduli cujus recursus secunda scrupula metiantur; sed quo major erit ejus sphæra, hoc minor invenietur mensura illa, inter centrum sphæræ & punctum suspensionis intercepta. Quia in isochronis pendulis, centra quidem oscillationis à punctis suspensionum æqualiter distant; amplius autem descendit centrum oscillationis infra centrum sphæræ majoris, quam minoris.

De centro Oscillationis.

Hinc necesse fuit illis, qui, ante hanc centri oscillatorii determinationem, mensuræ universalis constituendæ rationem inierunt; quod, jam inde à prima Horologii nostri inventione, nobilis illa Societas Regia Anglicana sibi negotium sumpsit, & recentius doctissimus Astronomus Lugdunensis, Gabriel Moutonus; his, inquam, necesse fuit designare globuli suspensi diametrum, vel proportione certa ad fili longitudinem, cujus nempe tricesimam vel aliam partem æquaret; vel mensura quadam cognita, ut digiti vel pollicis. Sed hoc posteriore modo, ponitur jam certi aliquid, quod id ipsum est quod quærendum est: etsi scio vix sensibilem errorem fore, dummodo sphæræ istam, quam jam dixi, magnitudinem non multum excedant. Priore autem posset quidem aliquo pacto res explicari; sed ita, ut numerandarum oscillationum labor subeundus sit, calculoque etiam utendum. Quamobrem præstat, centra oscillationis adhibendo, certam rationem sequi, nullisque præter necessitatem legibus obligari. atque hic jam majoribus sphæris quam exiguis potius utendum, quod illæ occursu aëris minus impediantur.

Cæterum, non sphæræ tantum ex filo suspensæ, sed & coni, cylindri, aliaque omnia solida, planaque, quorum centra oscillationis superius exhibuimus, ad hanc mensuram investigandam apta sunt; quoniam, à puncto suspensionis ad centrum oscillationis, certum idemque omnibus isochronis pendulis est intervallum. Neque etiam illa duntaxat horologia, quæ secunda scrupula aut eorum semisses singulis penduli recursibus indicant, ad hæc usur-

pare possumus; sed & aliâ quâcunque penduli longitudine instructis propositum obtinebitur, dummodo ex rotarum proportionibus, seu dentium numero, cognoscatur numerus oscillationum certo tempore peragendarum. Invento enim pendulo simplici, cujus librationes singulæ conveniant vel singulis, vel binis ternisve recursibus horologii, constabit jam hinc, quot penduli illius vices horæ spatio transigantur. Quarum numerus si quadretur, erit ut quadratum è 3600, numero scrupulorum secundorum horam unam efficientium, ad quadratum illius numeri, ita longitudo penduli simplicis inventi, (quæ longitudo semper à puncto suspensionis ad centrum oscillationis accipienda est) ad longitudinem penduli illius horarii tripedalis, quod diximus. Hoc enim inde constat, quod duorum quorumvis pendulorum longitudines sunt inter se, sicut quadrata temporum quibus singulæ oscillationes transeunt; ideoque contrariam rationem habent quadratorum à numeris, quos efficiunt oscillationes æqualibus temporum intervallis peractæ. Nam, cum hactenus experientiâ tantum comprobatum fuerit Theorema illud, de pendulorum longitudinibus; eas nempe duplicatam habere rationem temporum, quibus oscillationes singulæ peraguntur; nunc ejus demonstratio ex superius traditis manifesta est. Cum enim ostenderimus, singulos recursus penduli, inter cycloides suspensi, ad casum perpendicularem, è dimidia penduli longitudine, certam rationem habere; eam scilicet quam circumferentia circuli ad diametrum suam; facile hinc colligitur, tempora oscillationum in duobus pendulis esse inter se, sicut tempora descensus perpendicularis ex dimidiis eorum altitudinibus. Quæ altitudines dimidiæ, sive etiam totæ, cum habeant rationem duplicatam temporum, quibus ipsæ descensu perpendiculari percurruntur *; eædem quoque duplicatam rationem habebunt temporum, quæ oscillationes singulas metiuntur. Ab oscillationibus autem minimis penduli, inter cycloides suspensi, non differunt sensibiliter oscillationes minimæ penduli simplicis, cujus eadem sit longitudo. Itaque & pendulorum simplicium longitudines, duplicatam rationem habebunt temporum, quibus oscillationes minimæ transiguntur.

* Prop 3. Part. 2.

Quod siquis oscillationum numerandarum, quæ horæ aut semihoræ tempore transeunt, laborem non defugiat; horologiumque adsit, cujus index secunda scrupula demonstret; quæcunque accipiatur penduli simplicis longitudo, ejus numerus oscillationum, quæ hora una continentur, hoc modo cognoscetur; atque inde longitudo penduli tripedalis, ad secunda scrupula, ut antea, calculo prodibit.

PROPOSITIO XXV.

De centro Oscillationis.

Spatium definire, quod gravia, perpendiculariter cadentia, dato tempore percurrunt.

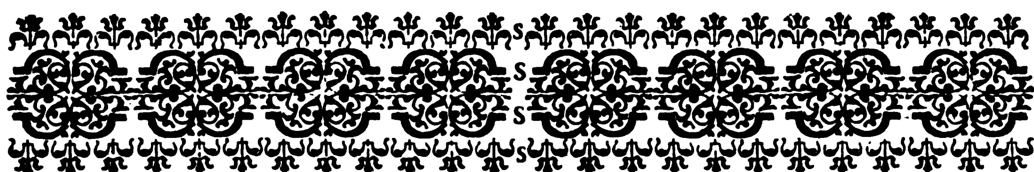
Hanc mensuram quicunque hactenus investigarunt, experimenta consulere necesse habuerunt; quibus, prout hactenus instituta fuere, non facile ad exactam determinationem pervenitur, propter velocitatem cadentium, sub finem motus acquisitam. Ex nostra autem prop. 25, de Descensu gravium, cognitaque longitudine penduli ad secunda scrupula, absque experimento, per certam consequentiam, rem expedire possumus. Ac primo quidem spatium illud inquiremus, quod unius scrupuli secundi tempore grave præterlabitur; ex quo quælibet alia deinde colligere licebit. Quia igitur penduli, ad secunda scrupula, longitudinem diximus esse pedum Horariorum 3: tempus autem unius oscillationis minimæ, est ad tempus descensus perpendicularis ex dimidia penduli altitudine, ut circumferentia circuli ad diametrum, hoc est, ut 355 ad 113: si fiat, ut numerus horum prior ad alterum, ita tempus unius secundi scrupuli, sive sexaginta tertiorum, ad aliud; fient $19''' \frac{1}{10}$, tempus descensus per dimidiam penduli altitudinem, quæ nempe est pedis unciarum 18. Sicut autem quadrata temporum, ita sunt spatia illis temporibus peracta, quemadmodum superiori propositione fuit ostensum. Ergo, si fiat ut quadratum ex $19''' \frac{1}{10}$ ad quadratum ex $60'''$, hoc est, ut 36481 ad 360000, ita 18 unciæ ad aliud, fient ped. 14. unc. 9. lin. 6, altitudo descensus perpendicularis, tempore unius secundi. Cum autem pes Horarius sit ad Parisiensem, ut 881 ad 864; erit eadem altitudo, ad hanc mensuram reducta, proximè pedum 15 & unciæ unius. Atque hæc cum accuratissimis experimentis nostris prorsus conveniunt. in quibus punctum illud temporis, quo casus finitur, non aurium aut oculi judicio discernitur; quorum neutrum hic satis tutum est; sed spatium descendendo peractum, alio modo, quem hic exponere tentabimus, absque ullo errore cognoscitur.

Penduli, ad parietem tabulamve erectam, suspensi dimidia oscillatio moram temporis, cadendo absumpti, indicat. Cujus sphærula, ut eodem momento ac plumbum casui destinatum dimittatur, utraque filo tenui connexa tenentur, quod admoto igne inciditur. Sed prius, casuro plumbo, funiculus alius adnectitur, ejus longitudinis, ut, cum totus exierit à plumbo tractus, nondum ad pa-

rietem illidatur pendulum. Funiculi ejus caput alterum, regulæ chartaceæ, aut ex tenui membrana paratæ, cohæret; ita ad parietem tabulamve applicatæ, ut trahentem funem facile sequi possit, rectáque secundum longitudinem suam descendere; eo loci transiens, quo penduli sphæra ad tabulam accidet. Absumpto igitur funiculo toto, pars insuper regulæ deorsum trahitur à cadente plumbo, priusquam pendulum ad tabulam pertingat. Quæ quanta sit pars, sphæra fuligine leviter infecta, regulamque præterlabentem signans, indicat. Huc autem addita funiculi longitudine, spatium cadendo emensum certò definitum habetur.

Aëris autem occursum, quasi nullus esset in his intelligimus, ut mensura cadentibus corporibus præfixa cum experimentis exacte consentiat. Nec sane tantus est ille, ut in altitudinibus his, quò ascendere datur, sensibile discrimen inducere possit; dummodo solida corpora è metallo, aut, si leviore materia constent, mole grandiuscula accipiantur. Levitas enim materiæ, in iis quæ cadendo aërem secant, ita magnitudine corporis pensatur, ut sphæra lignea, vel etiam è subere formata, paria faciat cum plumbea: quando nimirum diameter harum ad plumbeæ diametrum eam rationem habuerit, quam gravitas plumbi propria ad ligni suberisve gravitatem. Tunc enim gravitates sphærarum erunt inter se sicut earum superficies. Veruntamen, ut æquali celeritate, quantum sensu percipi potest, decidant corpora, quæ multum intrinseca gravitate differunt, nequaquam opus est ut proportio illa diametrorum servetur. Possunt enim inter se æqualia esse, dummodo utraque satis magna sint; aut ex non nimia altitudine decidant. Etenim illud quoque hic animadvertendum est, tantam vel altitudinem esse posse; vel, in mediocri etiam altitudine, tantam projecti corporis levitatem; ut ob aëris renitentiam, acceleratio motus tandem ab illa, quam in superioribus demonstravimus, proportione plurimum recessura sit. Namque in universum, corpori cuilibet, per aërem aliudve liquidum labenti, certus celeritatis modus, pro ratione ponderis ac superficiei suæ, constitutus est; quem excedere, aut potius ad quem pervenire nunquam possit. Quæ nempe celeritas ea est, quam si aër, aut liquor ille sursum tendens, haberet, suspensum corpus idem sibi innatans sustinere posset. Verum de his, alias fortasse, pluribus agendi occasio erit.





HOROLOGII OSCILLATORII

PARS QVINTA.

Constructionem aliam, è circulari pendulorum motu deductam, continens; & Theoremata de Vi Centrifuga.

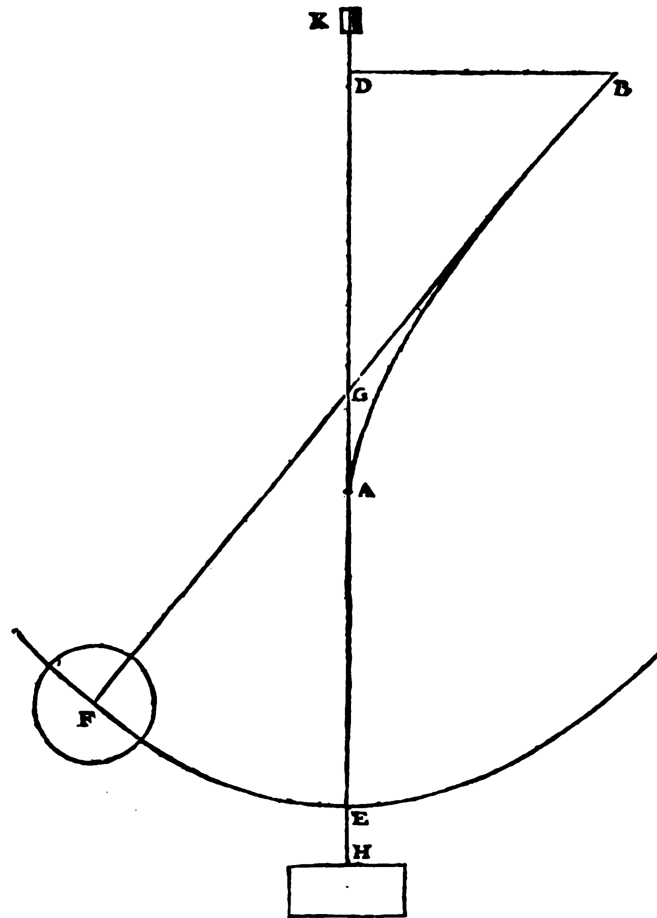
EST & aliud Oscillatorii motus genus, præter id quod hactenus pertractavimus. Ejusmodi nempe, quo, per circuli ambitum, pendulum pondus circumfertur. Vnde aliud quoque horologii commentum deduximus, eodem fere tempore quo prius illud; certoque itidem æquabilitatis principio nixum; sed cujus usus minus percrebuit, propter alterius illius constructionem, quodammodo simpliciorem facilioremque. Plura tamen hujus quoque generis de quo nunc loquimur, nec sine successu, constructa fuere: estque in his singulare illud, quod continuo atque æquabili motu circumferri cernitur index postremus, qui secunda scrupula designat; cum in priore nostro horologio, omnibusque aliis, subsultim quasi feratur. Item hoc quoque, quod absque strepitu, sonoque omni, moveantur hac ratione constructa automata. quanquam, ad observationes astronomicas, sonus ad singula secunda scrupula repetitus, utilitate non careat. Et constitueram quidem, descriptionem horum cum iis demum edere, quæ ad motum circularem & Vim Centrifugam, ita enim eam vocare libet, attinent; de quo argumento plura dicenda habeo, quam quæ hoc tempore exequi vacet. Sed, ut nova nec inutili speculatione maturius fruantur harum rerum studiosi, neve casu aliquo intercidat, hanc quoque partem, præter destinatum, cæteris adjunxi, qua machinæ hujus fabrica breviter exponitur, simulque Theoremata traduntur, ad vim centrifugam pertinentia; demonstratione ipsorum in aliud tempus dilata.

Horologii secundi constructio.

Non necessarium duxi, ut rotarum, quibus interiora horologii constant, dispositionem hic exhiberem; cum ea ab artificibus fa-

SECUNDI HOROLOGII DESCRIPTIO.

cile ordinari, variisque modis mutari possit; sed eam partem explicari satis esse, quæ motum ejus certa ratione moderatur. Cujus partis hic figura expressa est.



Axis D H ad horizontem erectus intelligendus est, ac super polis duobus mobilis. Huic ad A affixa est lamina, latitudine aliqua prædita, curvataque secundum lineam A B; quæ est paraboloides illa de qua ostendimus, propos. 8. partis 3, evolutione ejus, postquam ipsi recta quædam juncta fuerit, describi parabolam. Ea recta hic est A E; parabolam vero, ex evolutione totius B A E descriptam, refert linea E F. Filum curvæ B A applicatum, cujus extremo puncto parabola describitur, est B G F. Pondus illi affixum F. Dum autem axis D H in sese vertitur, filum B G F, in rectam lineam extensum, sphærulam F una circumducit, ita ut circulos horizonti parallelos percurrat; qui majores minoresve erunt, prout majori aut minori vi axis D H, ab rotis horologii in tympanidium K agentibus, incitabitur: sed ita, ut omnes in superficie conoidis parabolici contineantur. Atque hoc ipso æqualia semper circuitus tempo-

ra evadent, ut ex iis, quæ de hoc motu postea dicemus, apparebit. SECUNDI HOROLOGII DESCRIPTIO.

Quod si circuitus singulos, secundorum scrupulorum semisses notare velimus, oportet latus rectum parabolæ E F esse $4\frac{1}{2}$ unciarum pedis Horarii nostri, hoc est dimidium longitudinis penduli, cujus singulæ oscillationes semiscrupulum secundum impenderent. Ex parabolæ autem latere recto, pendet magnitudo lateris recti paraboloidis A B; quippe quod illius $\frac{27}{16}$ continet: atque item longitudo A E, quæ lateris recti parabolæ dimidium est. Si vero secunda scrupula unoquoque circuitu expleri desideremus, quadrupla priorum accipienda sunt, tum latera recta, tum linea A E.

Porro, etsi filum B G F veluti unicum ac simplex hactenus designavimus, sciendum tamen longe præstare ut parte superiori duplex sit, ac versus F in angulum coeat, 20 vel 30 partium. In quem finem & laminæ A B latitudo ad B tanta esse debet, quanta isti filorum divaricationi sufficit, vel & ipsa bifida facienda. Hoc pacto enim motus circularis ponderis F, absque alio ullo adminiculo, continuatur, ac filum utrumque sibi annexum in rectum extendit; quod non faceret, si unico tantum filo teneretur. Vbi tamen vim illam ab horologii rotis, vel pondere vel alia potentia motis, ad continuationem hujus motus circularis requiri sciendum. Quæ nempe vis per tympanidium K ad axem K H pervenit, ac minimo nisu, motum sphæræ F semel inditum, conservat.

Hoc autem quo facilius possit, liberrimam axis K H revolutionem esse oportet. Quod nulla ratione melius perfici compertum, quam si, parte sui ima, durato chalybe constet, suppositamque habeat adamantis superficiem planam; cujus minima quævis particula hic sufficit, subter laminam perforatam collocanda.

Cæterum in locum fili B G F, qua parte curvæ A B applicari debet, catenulam tenuem ex auro, aliove metallo, adhibere licebit, quo melius invariata servetur longitudo. Atque hoc in priore quoque horologio, ubi pendulum inter cycloides suspensum est, experti sumus. Sed ibi flexus catenulæ continuus, attritu annulorum, perexiguo licet, non parum impedit liberam penduli agitationem.

DE VI CENTRIFUGA ex motu circulari, Theoremata.

I.

SI mobilia duo æqualia, æqualibus temporibus circumferentias inæquales percurrant; erit vis centrifuga in ma-

jori circumferentia, ad eam quæ in minori, sicut ipsæ inter se circumferentiæ, vel earum diametri.

II.

Si duo mobilia æqualia, æquali celeritate ferantur, in circumferentiis inæqualibus; erunt eorum vires centrifugæ in ratione contraria diametrorum.

III.

Si duo mobilia æqualia in circumferentiis æqualibus ferantur, celeritate inæquali, sed utraque motu æquabili, qualem in his omnibus intelligi volumus; erit vis centrifuga velocioris, ad vim tardioris, in ratione duplicata celeritatum.

IV.

Si mobilia duo æqualia, in circumferentiis inæqualibus circumlata, vim centrifugam æqualem habuerint; erit tempus circuitus in majori circumferentia, ad tempus circuitus in minori, in subdupla ratione diametrorum.

V.

Si mobile in circumferentia circuli feratur ea celeritate, quam acquirit cadendo ex altitudine, quæ sit quartæ parti diametri æqualis; habebit vim centrifugam suæ gravitati æqualem; hoc est, eadem vi funem quo in centro detinetur intendet, atque cum ex eo suspensum est.

VI.

In cava superficie conoidis parabolici, quod axem ad perpendiculum erectum habeat, circuitus omnes mobilis, circumferentias horizonti parallelas percurrentis, sive parvæ sive magnæ fuerint, æqualibus temporibus peraguntur: quæ tempora singula æquantur binis oscillationibus penduli, cujus longitudo sit dimidium lateris recti parabolæ genitricis.

VII.

Si mobilia duo, ex filis inæqualibus suspensa, gyrentur ita ut circumferentias horizonti parallelas percurrant, capite altero fili immoto manente; fuerint autem conorum, quorum superficiem fila hoc motu describunt, altitudines æquales; tempora quoque circulationum æqualia erunt.

VIII.

VIII.

Si mobilia duo, uti prius, motu conico gyrentur, filis æqualibus vel inæqualibus suspensa; fuerintque conorum altitudines inæquales; erunt tempora circulationum in subduplicata ratione ipsarum altitudinum.

IX.

Si pendulum, motu conico latum, circuitus minimos faciat; eorum singulorum tempora, ad tempus casus perpendicularis ex dupla penduli altitudine, eam rationem habent, quam circumferentia circuli ad diametrum: ac proinde æqualia sunt tempori duarum oscillationum lateralium, ejusdem penduli, minimarum.

X.

Si mobile in circumferentia feratur, circuitusque singulos absolvat eo tempore, quo pendulum, longitudinem semidiametri circumferentiæ ejus habens, motu conico circuitum minimum absolveret, vel duplicem oscillationem minimam lateralem: habebit vim centrifugam suæ gravitati æqualem.

XI.

Penduli cujuslibet, motu conico lati, tempora circuitus æqualia erunt tempori casus perpendicularis, ex altitudine penduli filo æquali; cum angulus inclinationis fili, ad planum horizontis, fuerit partium 2. scrup. 54, proxime. Exacte vero, si anguli dicti sinus fuerit ad radium, ut quadratum circulo inscriptum ad quadratum à circumferentia ejus.

XII.

Si pendula duo, pondere æqualia, sed inæquali filorum longitudine, motu conico gyrentur, fuerintque conorum altitudines æquales; erunt vires, quibus fila sua intendent, in eadem ratione quæ est filorum longitudinis.

XIII.

Si pendulum simplex oscillatione laterali maxima agitetur, hoc est, si per totum circuli quadrantem descendat: ubi ad punctum imum circumferentiæ pervenerit, triplo majori vi filum suum trahet, quam si ex illo simpliciter suspensum foret.

FINIS.

CORRIGENDA.

Pag. 5. versu 9. à fine, pro N *lege* R ; *quæ litera in figura omissa est.*

Pag. 6. v. 4. à fine, pro X *scribe a.*

Ibidem v. ult. pro E *scribe* e. *Et sic quoque pag. sequ. versu 2.*

Pag. 7. v. 2. à fine, pro M K *scribe* K.

Pag. 16. v. 13. post, tricesimamve, *adde* aut etiam minorem.

Pag. ead. v. 23. & 24. citantur literæ A, B, C, *quæ in figura omissa sunt. ubi lineâ hac eâdem 24. post*, à puncto autem C, *adde* centro oscillationis.

Pag. 26. v. 3. lege quadrato.

Pag. 56. v. 7. à fine pro O Λ *lege* S Λ.

Pag. 81. & 84. in figurarum altera quæ est ad sinistram, non ex T *ducenda erat* T X, *sed ex* V *recta* V X *parallela* L K.

Pag. 85. v. 11. à fine, post K M, L N, *adde*, quarum hæc major erit.

Pag. 86. v. 1. pro a a x lege a x x, & dele ∞ *y.*

Pag. 87. v. 10. à fine, pro F D *scribe* B D.

Ibidem v. 2. à fine, pro F H K *scribe* A R I.

Item v. 3. à fine, lege continuatæ.

Pag. 95. v. 1. pro B *scribe* G.

Pag. ead. v. à fine 5. lege volumus.

Pag. 99. v. 12. dele velut Q Q.

Pag. 104. v. 10. pro A D *lege* M D.

Pag. 107. in fig. quæ ad dextram, debebat punctum H *esse ad alteram partem puncti* C.

Pag. 111. v. à fine 4. 6. & 7. pro 2 *z m lege* 2 *x m.*

Pag. 112. v. 2. pro $\frac{mmll}{\theta}$, *lege* $\frac{mm-ll}{\theta}$.

Pag. 123. v. 20. pro & H centrum gravitatis, *lege*, & ό H subcentrica.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 02629 1511